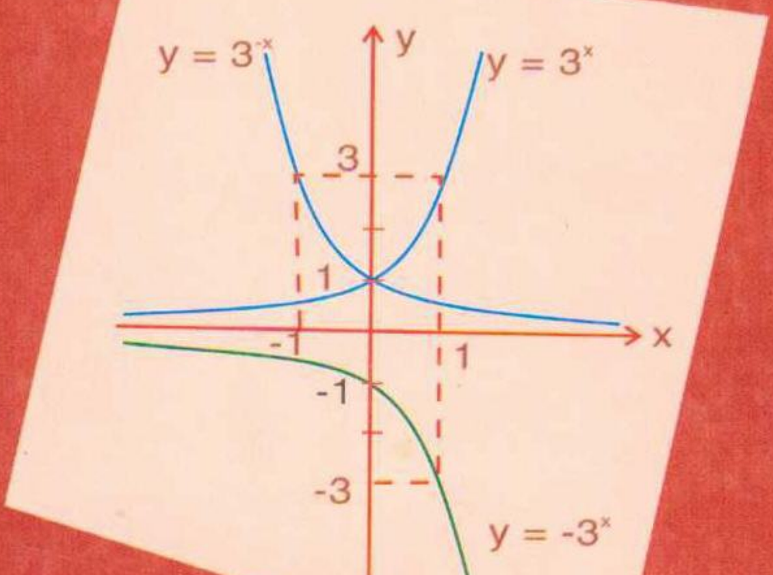
Toán nâng cao
TỰ LUẬN & TRẮC NGHIỆM
ĐẠI SỐ & GIẢI TÍCH 11



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LÊ HỒNG ĐỨC - LÊ BÍCH NGỌC

TOÁN NÂNG CAO
TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM
ĐẠI SỐ & GIẢI TÍCH
11

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

MỞ ĐẦU

Sự ưu việt của phương pháp thi trắc nghiệm đã và đang được chứng minh từ những nước có nền giáo dục tiên tiến trên thế giới bởi những ưu điểm như tính khách quan, tính bao quát và tính kinh tế.

Trong thời gian không xa, theo chủ trương của BGD&ĐT các trường đại học, cao đẳng và trung học chuyên nghiệp sẽ chuyển sang hình thức tuyển sinh bằng phương pháp trắc nghiệm. Và để có được thời gian chuẩn bị tốt nhất, các bài kiểm tra kiến thức trong chương trình THCS và THPT cũng sẽ có phần trắc nghiệm để các em học sinh làm quen.

Tuy nhiên, việc biên soạn các câu hỏi trắc nghiệm cần tuân thủ một số yêu cầu cơ bản về mặt lí luận sư phạm và ý nghĩa đích thực của các số liệu thống kê. Ngoài ra, một đề thi môn toán được chấm hoàn toàn dựa trên kết quả trắc nghiệm chắc chắn sẽ chưa phù hợp với hiện trạng giáo dục của nước ta bởi nhiều lí do, từ đó dẫn tới việc không đảm bảo được tính khách quan trong việc đánh giá kết quả học tập của học sinh. Để khắc phục nhược điểm này Nhóm Cự Môn chúng tôi đề xuất hướng thực hiện như sau:

1. *Với mỗi đề thi hoặc đề kiểm tra vẫn tuân thủ đúng cấu trúc chung và điểm trắc nghiệm không quá 3.5 điểm.*
2. *Trong những câu hỏi có phần trắc nghiệm sẽ được hiểu là "**trắc nghiệm và tự luận**". Ở đây, thông thường các em học sinh sẽ phải lựa chọn một trong bốn đáp số và cần biết rằng số điểm a của câu hỏi này được chia làm đôi:*

- *Nếu lựa chọn đúng lời giải trắc nghiệm sẽ nhận được* $\frac{a}{2}$ *điểm.*
- *Nếu thực hiện đúng lời giải tự luận cho câu hỏi sẽ nhận được* $\frac{a}{2}$ *điểm còn lại.*

Đây chính là yếu tố để đảm bảo tính khách quan bởi:

1. *Với những học sinh chỉ mò mẫm đáp án hoặc nhận được nó thông qua những yếu tố xung quanh sẽ chỉ nhận được tối đa* $\frac{a}{2}$ *điểm với xác suất 25%.*
2. *Với những học sinh hiểu được nội dung câu hỏi từ đó định hướng được các phép thử bằng tay hoặc bằng máy tính fx – 570MS chắc chắn sẽ nhận được* $\frac{a}{2}$ *điểm.*
3. *Với những học sinh khá hơn biểu hiện bằng việc hiểu được nội dung câu hỏi và có thể thực hiện được một phần câu hỏi này dưới dạng tự luận sẽ nhận được khoảng* $\frac{a}{2} + \frac{a}{4} = \frac{3a}{4}$ *điểm.*
4. *Cuối cùng, với những học sinh biết cách thực hiện câu hỏi dưới dạng tự luận sẽ nhận được a điểm.*

Dựa trên tư tưởng này, Nhóm Cự Môn dưới sự phụ trách của Lê Hồng Đức xin trân trọng giới thiệu tới bạn đọc bộ sách:

TOÁN NÂNG CAO TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM THPT

Bộ sách này sẽ cung cấp cho bạn đọc một ngân hàng bài tập tự luận và trắc nghiệm môn toán THPT có chất lượng theo đúng thứ tự của chương trình Toán PTTH bởi về hình thức bạn đọc sẽ nhận thấy rằng bộ sách này chính là những cuốn sách giải bài tập của bộ sách ***Học và Ôn tập Toán*** *(được viết theo lớp 10, 11, 12) do NXB Đại học Quốc gia Hà Nội ấn hành.*

Cuốn **ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11** *được chia thành 6 chương:*

Chương I: Dãy số

Chương II: Giới hạn của hàm số

Chương III: Hàm số liên tục

Chương IV: Hàm số mũ – Hàm số logarit

Chương V: Phương trình, bất phương trình và hệ mũ

Chương VI: Phương trình, bất phương trình và hệ lôgarit

Cuối cùng, cho dù đã rất cố gắng, nhưng thật khó tránh khỏi những thiếu sót bởi những hiểu biết và kinh nghiệm còn hạn chế, rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa. Mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ tới:

Địa chỉ: Nhóm tác giả Cự Môn do Lê Hồng Đức phụ trách
Số nhà 20 - Ngõ 86 - Đường Tô Ngọc Vân - Quận Tây Hồ - Hà Nội
Điện thoại: (04) 7196671 hoặc 0893046689
E-mail: cumon@hn.vnn.vn hoặc lehongduc39@yahoo.com.

Hà Nội, ngày 1 tháng 4 năm 2006

NHÓM CỰ MÔN – LÊ HỒNG ĐỨC

CHƯƠNG I

DÃY SỐ – CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

CHỦ ĐỀ 1

DÃY SỐ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. ĐỊNH NGHĨA

***Định nghĩa**: Dãy số (u_n) là một ánh xạ từ $\mathbf{N}^*$ vào $\mathbf{R}$:*

$$f : N^* \to R$$

Khi đó, ta có $u_n = f(n)$.

Kí hiệu (u_n) hay ở dạng khai triển là $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$

2. CÁCH XÁC ĐỊNH MỘT DÃY SỐ

Một dãy số thường được xác định bằng một trong các cách:

Cách 1: Dãy số xác định bởi một công thức cho số hạng tổng quát u_n.

Cách 2: Dãy số xác định bởi một công thức truy hồi, tức là:

- Trước tiên, cho số hạng đầu (hoặc vài số hạng đầu).
- Cho công thức biểu thị số hạng thứ n qua số hạng (hay vài số hạng) đứng trước nó.

Cách 3: Dãy số xác định bởi một mệnh đề mô tả các số hạng liên tiếp của nó.

3. DÃY SỐ ĐƠN DIỆU

Định nghĩa 1 (*Dãy số tăng*): *Dãy số (u_n) được gọi là tăng nếu* $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n < u_{n+1}$.

Định nghĩa 2 (*Dãy số giảm*): *Dãy số (u_n) được gọi là giảm nếu* $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n > u_{n+1}$.

4. DÃY SỐ BỊ CHẶN

Định nghĩa 3 (*Dãy số bị chặn trên*): *Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu:*

$$\exists M \in \mathbf{R} : u_n \leq M, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Định nghĩa 4 (*Dãy số bị chặn dưới*): *Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu:*

$$\exists m \in \mathbf{R} : u_n \geq m, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Định nghĩa 5 (*Dãy số bị chặn*): *Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là:*

$$\exists m, M \in \mathbf{R} : m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN VÀ BÀI TẬP

Bài toán 1: Mở đầu về dãy số.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Với giả thiết cho dãy số (u_n) dưới dạng công thức tổng quát hoặc biểu thức truy hồi và câu hỏi thường được đặt ra là:

- Hãy viết k số hạng đầu của dãy số hoặc tìm u_k. Câu hỏi này được thực hiện bằng phép thế.
- Xác định xem a là số hạng thứ mấy của dãy số. Câu hỏi này được thực hiện bằng việc giải phương trình ẩn n.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 1. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{2n+1}{2n-1}$.

a. Viết 6 số hạng đầu của dãy.

☐ $3; \frac{5}{3}; \frac{7}{5}; \frac{9}{7}; \frac{11}{9}; \frac{13}{11}$.

☐ $-1; 6; \frac{5}{3}; \frac{7}{5}; \frac{9}{7}; \frac{11}{9}$.

☐ $6; \frac{7}{5}; \frac{11}{9}; \frac{15}{13}; \frac{19}{17}; \frac{23}{21}$.

☐ $\frac{5}{3}; \frac{9}{7}; \frac{13}{11}; \frac{17}{15}; \frac{21}{19}$.

b. Tìm xem $\dfrac{19}{17}$ là số hạng thứ mấy của dãy số ?

☐ u_5. ☐ u_7. ☐ u_9. ☐ u_{11}.

Bài tập 2. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n-1}{\sqrt{n^2+36}}$.

a. Viết 5 số hạng đầu của dãy.

☐ $0; \frac{2}{\sqrt{45}}; \frac{4}{\sqrt{61}}; \frac{6}{\sqrt{85}}; \frac{8}{\sqrt{117}}$.

☐ $-\frac{1}{6}; \frac{1}{\sqrt{40}}; \frac{3}{\sqrt{52}}; \frac{5}{\sqrt{72}}; \frac{7}{10}$.

☐ $0; \frac{1}{\sqrt{40}}; \frac{2}{\sqrt{45}}; \frac{3}{\sqrt{52}}; \frac{4}{\sqrt{61}}$.

☐ $\frac{1}{\sqrt{40}}; \frac{3}{\sqrt{52}}; \frac{5}{\sqrt{72}}; \frac{7}{10}; \frac{9}{\sqrt{136}}$

b. Tìm xem $\dfrac{7}{10}$ là số hạng thứ mấy của dãy số ?

☐ u_5. ☐ u_7. ☐ u_8. ☐ u_{10}.

Bài tập 3. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{(-1)^n + n}{n+1}$.

a. Tìm $u_9, u_{12}, u_{2n}, u_{2n+1}$.

☐ $1; 1; 1; 1$.

☐ $\frac{4}{5}; 1; 1; \frac{n}{n+1}$.

☐ $\frac{4}{5}; \frac{11}{13}; \frac{2n-1}{2n+1}; \frac{n}{n+1}$.

☐ $9; 12; 2n; 2n+1$.

b. Tìm xem 0 là số hạng thứ mấy của dãy số ?

☐ u_{20}. ☐ u_{2n}. ☐ u_{2n+1}. ☐ u_1.

c. Tìm xem 1 là số hạng thứ mấy của dãy số ?

☐ u_3. ☐ u_{101}. ☐ u_{2007}. ☐ u_{2n}.

Bài tập 4. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 1,\ n \geq 2 \end{cases}.$$

a. Hãy viết 6 số hạng đầu của dãy số.

☐ 1; 7; 31; 127; 511; 2047. ☐ 1; 2; 4; 8; 16; 32.

☐ 1; 3; 15; 63; 127; 511. ☐ 1; 3; 7; 15; 31; 63.

b. Tìm xem 511 là số hạng thứ mấy của dãy số ?

☐ u_5. ☐ u_6. ☐ u_{11}. ☐ u_9.

Bài tập 5. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 2,\ u_2 = 3 \\ u_n = 3u_{n-2} - 2u_{n-1},\ n \geq 3 \end{cases}.$$

a. Tìm u_4, u_8.

☐ 0; −180. ☐ 3; 63.

☐ 9; 549. ☐ 2; −18.

b. Tìm xem 11 là số hạng thứ mấy của dãy số ?

☐ u_3. ☐ u_5. ☐ u_{18}. ☐ Không có.

Bài toán 2: Sử dụng phương pháp quy nạp chứng minh dãy số (u_n) thoả mãn tính chất K.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: (*Bước cơ sở*): Chứng minh rằng số hạng đầu thoả mãn tính chất K.

Bước 2: (*Bước quy nạp*): Giả sử số hạng u_k thoả mãn tính chất K. Ta đi chứng minh số hạng u_{k+1} cũng thoả mãn tính chất K.

Bước 3: Kết luận dãy số (u_n) thoả mãn tính chất K.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 6. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 13^n - 1$. Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy số này đều chia hết cho 12.

Bài tập 7. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_n = 2u_{n-2} + u_{n-1},\ n \geq 3 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy số này đều là số lẻ.

Bài tập 8. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 2^{n+2}$. Chứng minh rằng $u_n > 2n + 5\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Bài tập 9. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1,\ u_2 = 2 \\ u_n = u_{n-2} + 2u_{n-1},\ n \geq 3 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng $u_n \leq \left(\frac{5}{2}\right)^n$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Bài tập 10. * Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = a,\ u_2 = b \\ u_n = c.u_{n-1} + d.u_{n-2},\ n \geq 3 \end{cases},\ \text{với } cd \neq 0.$$

Chứng minh rằng $u_n = (e_1 + ne_2)r^n$ với e_1, e_2 là các hằng số phụ thuộc a, b và r là nghiệm kép của phương trình $x^2 - cx - d = 0$.

Áp dụng: Cho dãy số:

$$\begin{cases} a_1 = 1,\ a_2 = -3 \\ a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2},\ n \geq 3 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng $a_n = 3^n - 2n.3^{n-1}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Hướng dẫn: Vì r là nghiệm kép của phương trình $x^2 - cx - d = 0$ nên $c = 2r$ và $d = -r^2$, do đó u_n có dạng $u_n = 2ru_{n-1} - r^2u_{n-2}$.

Bài tập 11. * Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = a,\ u_2 = b \\ u_n = c.u_{n-1} + d.u_{n-2},\ n \geq 3 \end{cases},\ \text{với } cd \neq 0.$$

Chứng minh rằng $u_n = e_1r_1^n + e_2r_2^n$ với e_1, e_2 là các hằng số phụ thuộc a, b và r_1, r_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình $x^2 - cx - d = 0$.

Áp dụng: Cho dãy số:

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ n \geq 3 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Hướng dẫn: Chứng minh bằng quy nạp.

Bài toán 3: Xác định công thức của dãy số (u_n).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Sử dụng biến đổi đại số để thu gọn và đơn giản biểu thức của u_n.

Cách 2: Sử dụng phương pháp quy nạp bằng việc thực hiện theo các bước:

- *Bước 1:* Viết một vài số hạng đầu của dãy, từ đó dự đoán công thức cho u_n.
- *Bước 2:* Chứng minh công thức dự đoán bằng phương pháp quy nạp.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 12. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_n = 2u_{n-1},\ n \geq 2 \end{cases}.$$

Xác định công thức tính u_n theo n.

☐ $u_n = 2^{n+1}$. ☐ $u_n = 2^{2n-1}$. ☐ $u_n = 4^{n+1}$. ☐ $u_n = 4^{2n-1}$.

Bài tập 13. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}},\ n \geq 2 \end{cases}.$$

Xác định công thức tính u_n theo n.

☐ $u_n = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$. ☐ $u_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$. ☐ $u_n = \cos\frac{\pi}{2^n}$. ☐ $u_n = \sin\frac{\pi}{2^n}$.

Bài tập 14. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2}{n^2 + 4n + 3}$ với mọi $n \in \mathbf{N}^*$ và dãy số (S_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} S_1 = u_1 \\ S_n = S_{n-1} + u_n,\ n \geq 2 \end{cases}.$$

Xác định công thức tính S_n theo n.

☐ $S_n = \frac{2}{n^2 + 4n + 3}$. ☐ $S_n = \frac{1}{(n+2)(n+3)}$.

☐ $S_n = \frac{1}{(n+1)(n+3)}$. ☐ $S_n = \frac{5n^2 + 13n}{(n+2)(n+3)}$.

Bài tập 15. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_n = \frac{1}{3}u_{n-1},\ n \geq 2 \end{cases}.$$

Xác định công thức tính u_n theo n.

☐ $u_n = \frac{5}{3^{n-1}}$. ☐ $u_n = \frac{1}{3^{n-1}}$. ☐ $u_n = \frac{5^{n-1}}{3}$. ☐ $u_n = \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$.

Bài tập 16. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \frac{3}{u_{n-1}},\ n \geq 2 \end{cases}.$$

Xác định công thức tính u_n theo n.

☐ $u_n = 1$. ☐ $u_n = 3$.

☐ $u_n = \begin{cases} 1 \text{ khi n lẻ} \\ 3 \text{ khi n chẵn} \end{cases}$. ☐ $u_n = \begin{cases} 1 \text{ khi n lẻ} \\ 3 \text{ khi n chẵn} \end{cases}$.

Bài toán 4: Xét tính đơn điệu của một dãy số (u_n).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lập hiệu $H = u_{n+1} - u_n$, từ đó xác định dấu của H.

Bước 2: Khi đó:

- Nếu $H > 0$ với $\forall n \in \mathbf{N}^*$ thì dãy số (u_n) tăng.
- Nếu $H < 0$ với $\forall n \in \mathbf{N}^*$ thì dãy số (u_n) giảm.

Cách 2: Nếu $u_n > 0$ với $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ta có thể thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lập tỉ số $P = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, từ đó so sánh P với 1.

Bước 2: Khi đó:

- Nếu $P > 1$ với $\forall n \in \mathbf{N}^*$ thì dãy số (u_n) tăng.
- Nếu $P < 1$ với $\forall n \in \mathbf{N}^*$ thì dãy số (u_n) giảm.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 17. Xét tính đơn điệu của các dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{n}{4^n}$.

☐ Tăng ☐ Giảm ☐ Không tăng, không giảm

Bài tập 18. Xét tính đơn điệu của các dãy số (u_n), biết $u_n = n + \sin^2 n$.

☐ Tăng ☐ Giảm ☐ Không tăng, không giảm

Bài tập 19. Xét tính đơn điệu của các dãy số (u_n), biết $u_n = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

☐ Tăng ☐ Giảm ☐ Không tăng, không giảm

Bài tập 20. Xét tính đơn điệu của các dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{1-n}{n}$.

☐ Tăng ☐ Giảm ☐ Không tăng, không giảm

Bài tập 21. Xét tính đơn điệu của các dãy số (u_n), biết $u_n = -\dfrac{1}{n^2+1}$.

☐ Tăng ☐ Giảm ☐ Không tăng, không giảm

Bài tập 22. Xét tính đơn điệu của các dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

☐ Tăng ☐ Giảm ☐ Không tăng, không giảm

Bài tập 23. Xét tính đơn điệu của dãy số (u_n), biết:

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = 2u_{n-1} - 1,\ n \geq 2 \end{cases}.$$

☐ Tăng ☐ Giảm ☐ Không tăng, không giảm

Bài tập 24. Xét tính đơn điệu của dãy số (u_n), biết:

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

☐ Tăng ☐ Giảm ☐ Không tăng, không giảm

Bài tập 25. Xét tính đơn điệu của dãy số (u_n), biết:

$$u_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}} \text{ (n dấu căn).}$$

Bài tập 26. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{n^2 + n}$ và dãy số (S_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} S_1 = u_1 \\ S_n = S_{n-1} + u_n,\ n \geq 2 \end{cases}.$$

a. Xét tính đơn điệu của các dãy số (u_n).

☐ Tăng ☐ Giảm ☐ Không tăng, không giảm

b. Xét tính đơn điệu của các dãy số (S_n).

☐ Tăng ☐ Giảm ☐ Không tăng, không giảm

c. Xác định công thức tính S_n theo n.

☐ $S_n = \frac{1}{n}$. ☐ $S_n = \frac{n}{n+1}$.

☐ $S_n = \frac{1}{n+1}$. ☐ $S_n = \frac{n+1}{n}$.

Bài tập 27. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1}$ và dãy số (P_n) với:

$$P_n = u_1.u_2\ldots u_n.$$

a. Xét tính đơn điệu của dãy số (u_n).

☐ Tăng ☐ Giảm ☐ Không tăng, không giảm

b. Xét tính đơn điệu của dãy số (P_n).

☐ Tăng ☐ Giảm ☐ Không tăng, không giảm

c. Xác định công thức tính P_n theo n.

☐ $P_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$. ☐ $P_n = \frac{n}{n+1}$.

☐ $P_n = \frac{2(n+2)}{n+1}$. ☐ $P_n = \frac{2}{n+1}$.

Bài toán 5: Xét tính bị chặn của một dãy số (u_n).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng định nghĩa:

- Nếu $\exists M \in \mathbf{R} : u_n \leq M, \forall n \in \mathbf{N}^*$ thì (u_n) bị chặn trên.
- Nếu $\exists m \in \mathbf{R} : u_n \geq m, \forall n \in \mathbf{N}^*$ thì (u_n) bị chặn dưới.
- Nếu $\exists m, M \in \mathbf{R} : m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbf{N}^*$ thì (u_n) bị chặn.

Chú ý: Dựa trên kết quả:

- Mọi dãy số (u_n) giảm luôn bị chặn trên bởi u_1.
- Mọi dãy số (u_n) tăng luôn bị chặn dưới bởi u_1.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 28. Dãy số (u_n), biết $u_n = \frac{n^2 - 1}{2n}$ là:

☐ Chỉ bị chặn trên ☐ Bị chặn

☐ Chỉ bị chặn dưới ☐ Không bị chặn trên và dưới

Bài tập 29. Dãy số (u_n), biết $u_n = \frac{1}{n^2 + 1}$ là:

☐ Chỉ bị chặn trên ☐ Bị chặn

☐ Chỉ bị chặn dưới ☐ Không bị chặn trên và dưới

Bài tập 30. Dãy số (u_n), biết $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$ là:

☐ Chỉ bị chặn trên ☐ Bị chặn

☐ Chỉ bị chặn dưới ☐ Không bị chặn trên và dưới

Bài tập 31. Dãy số (u_n), biết $u_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+2)}$ là:

☐ Chỉ bị chặn trên ☐ Bị chặn

☐ Chỉ bị chặn dưới ☐ Không bị chặn trên và dưới

Bài tập 32. Dãy số (u_n), biết $u_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ là:

☐ Chỉ bị chặn trên ☐ Bị chặn

☐ Chỉ bị chặn dưới ☐ Không bị chặn trên và dưới

Bài tập 33. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = \dfrac{u_{n-1} + 8}{2}, \; n \geq 2 \end{cases}.$$

a. Chứng minh rằng (u_n) bị chặn trên bởi 8.

b. Chứng minh rằng (u_n) tăng. Suy ra (u_n) bị chặn.

Bài tập 34. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}}, \; n \geq 2 \end{cases}.$$

a. Tìm công thức biểu diễn u_n theo n.

☐ $u_n = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$. ☐ $u_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$. ☐ $u_n = \cos\frac{\pi}{2^n}$. ☐ $u_n = \sin\frac{\pi}{2^n}$

b. Chứng minh rằng (u_n) bị chặn.

Bài tập 35. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \dfrac{u_{n-1} + 2}{u_{n-1} + 1}, n \geq 2 \end{cases}.$$

a. Chứng minh rằng (u_n) bị chặn trên bởi 1.5.

b. Chứng minh rằng (u_n) bị chặn dưới bởi 1.

III. HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1. 6 số hạng đầu của dãy là 3; $\frac{5}{3}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{9}{7}$; $\frac{11}{9}$; $\frac{13}{11}$. Và $u_9 = \frac{19}{17}$.

Bài tập 2. 5 số hạng đầu của dãy là 0; $\frac{1}{\sqrt{40}}$; $\frac{2}{\sqrt{45}}$; $\frac{3}{\sqrt{52}}$; $\frac{4}{\sqrt{61}}$. Và $u_8 = \frac{7}{10}$.

Bài tập 3. Ta có $u_9 = \frac{4}{5}$, $u_{12} = 1$, $u_{2n} = 1$, $u_{2n+1} = \frac{n}{n+1}$; $u_1 = 0$ và $u_{2n} = 1$.

Bài tập 4. 6 số hạng đầu của dãy là 1; 3; 7; 15; 31; 63. Và $u_9 = 511$.

Bài tập 5. Ta có $u_4 = 9$; $u_8 = 549$ và không tồn tại số hạng có giá trị bằng 11.

Bài tập 6. Ta có:

$$u_1 = 13 - 1 = 12 \Rightarrow u_1 \vdots 12.$$

Giả sử $u_k \vdots 12$, tức là $(13^k - 1) \vdots 12$.

Ta đi chứng minh $u_{k+1} \vdots 12$, thật vậy:

$$u_{k+1} = 13^{k+1} - 1 = 13^{k+1} - 13^k + 13^k - 1 = 12.\ 13^k + (13^k - 1)$$

suy ra $u_{k+1} \vdots 12$ bởi $12.\ 13^k \vdots 12$ và $(13^k - 1) \vdots 12$.

Vậy, mọi số hạng của dãy số (u_n) đều chia hết cho 12.

Bài tập 7. Ta có $u_1 = 3$ là số lẻ.

Giả sử công thức đúng với u_k lẻ, suy ra u_{k-1} lẻ.

Ta đi chứng minh u_{k+1} lẻ, thật vậy:

$u_{k+1} = 2u_{k-1} + u_k$ là tổng của một số chẵn và một số lẻ, nên u_{k+1} lẻ.

Vậy, mọi số hạng của dãy số này đều là số lẻ.

Bài tập 8. Ta có:

$$u_1 = 2^3 = 8 > 7 = 2 + 5 \Rightarrow \text{đúng với } n = 1.$$

Giả sử $u_k > 2k + 5$, tức là $2^{k+2} > 2k + 5$.

Ta đi chứng minh $u_{k+1} > 2(k + 1) + 5 = 2k + 7$, thật vậy:

$$u_{k+1} = 2^{k+1+2} = 2.\ 2^{k+2} > 2(2k + 5) = (2k + 7) + (2k + 3) > 2k + 7.$$

Vậy, mọi số hạng của dãy số (u_n) đều thoả mãn $u_n > 2n + 5$.

Bài tập 9. Ta có $u_3 = 5 \le \left(\frac{5}{2}\right)^3$ $\Rightarrow$ đúng với n = 1, 2, 3.

Giả sử công thức đúng với n = k, tức là $u_{k-1} \le \left(\frac{5}{2}\right)^{k-1}$ và $u_k \le \left(\frac{5}{2}\right)^k$

ta đi chứng minh $u_{k+1} < \left(\frac{5}{2}\right)^{k+1}$.

Thật vậy:

$$u_{k+1} = u_{k-1} + 2u_k \le \left(\frac{5}{2}\right)^{k-1} + 2\left(\frac{5}{2}\right)^k = \left(\frac{5}{2}\right)^{k+1}.\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{-2} + 2\left(\frac{5}{2}\right)^{-1}\right]$$

$$= \left(\frac{5}{2}\right)^{k+1}.\left(\frac{4}{25} + \frac{4}{5}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^{k+1}.\frac{24}{25} < \left(\frac{5}{2}\right)^{k+1}, \text{đpcm.}$$

Vậy, ta luôn có $u_n \le \left(\frac{5}{2}\right)^n$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Bài tập 10. Bạn đọc làm theo hướng dẫn.

Bài tập 11. Tương tự bài 10.

Bài tập 12. Ta có $u_1 = 4 = 2^2$; $u_2 = 2.2^2 = 2^3$; $u_3 = 2.2^3 = 2^4$.

Từ đó, bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được rằng $u_n = 2^{n+1}$.

Bài tập 13. Ta có $u_1 = \sqrt{2} = 2.\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos\frac{\pi}{2^2}$.

Từ đó, bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được rằng $u_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

Bài tập 14. Ta có ngay:

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Mặt khác, ta có biểu diễn:

$$u_n = \frac{2}{n^2 + 4n + 3} = \frac{2}{(n+1)(n+3)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}.$$

Từ đó, ta nhận được:

$$u_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$$u_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$$

$$u_3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6}$$

$$\ldots$$

$$u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}$$

Cộng theo vế các đẳng thức trên, ta được:

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} = \frac{5n^2+13n}{(n+2)(n+3)}.$$

Bài tập 15. Ta có $u_1 = 5;\ u_2 = \frac{5}{3};\ u_3 = \frac{5}{3^2}$.

Từ đó, bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được rằng $u_n = \frac{5}{3^{n-1}}$.

Bài tập 16. Ta có $u_1 = 1;\ u_2 = 3;\ u_3 = 1;\ u_4 = 3$.

Từ đó, bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được rằng $u_n = \begin{cases} 1 \text{ khi n lẻ} \\ 3 \text{ khi n chẵn} \end{cases}$.

Bài tập 17. Ta có(u_n) giảm bằng cách lập tỉ số lập tỉ số:

$$P = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{4^{n+1}}.\frac{4^n}{n} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{4}.4 = 1.$$

Bài tập 18. Ta có(u_n) tăng bằng cách lập hiệu:

$$H = u_{n+1} - u_n = [(n+1) + \sin^2(n+1)] - (n + \sin^2 n)$$
$$= (1 - \sin^2 n) + \sin^2(n+1) > 0.$$

Bài tập 19. Không tăng, không giảm.

Bài tập 20. Ta có(u_n) giảm bằng cách lập tỉ số hoặc lập hiệu.

Bài tập 21. Ta có(u_n) giảm bằng cách lập tỉ số lập tỉ số.

Bài tập 22. Không tăng, không giảm.

Bài tập 23. Ta có (u_n) tăng và có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Xét hiệu:

$$H = u_{n+1} - u_n = (2u_n - 1) - u_n = u_n - 1.$$

Ta sẽ đi chứng minh $u_n > 1,\ \forall n \in \mathbf{N}^*$ bằng quy nạp – *Bạn đọc tự làm.*

Do đó $H > 0$, từ đó suy ra dãy (u_n) tăng.

Cách 2: Trước tiên, ta đi chứng minh $u_n > 1,\ \forall n \in \mathbf{N}^*$ – *Bạn đọc tự làm.*

Xét tỉ số:

$$P = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2u_n - 1}{u_n} = 2 - \frac{1}{u_n} > 1.$$

Vậy, dãy (u_n) tăng.

Bài tập 24. Ta có(u_n) tăng bằng cách lập hiệu $H = u_{n+1} - u_n$.

Bài tập 25. Ta có (u_n) tăng bằng cách lập hiệu $H = u_{n+1} - u_n$ rồi sử dụng phương pháp chứng minh quy nạp.

Bài tập 26. Ta có (u_n) giảm, (S_n) tăng và $S_n = \frac{n}{n+1}$.

Bài tập 27. Ta có (u_n) tăng, (P_n) giảm và $P_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$.

Bài tập 28. Viết lại u_n dưới dạng:

$$u_n = \frac{1}{2}\left(n - \frac{1}{n}\right) \geq 0 \Rightarrow (u_n) \text{ bị chặn dưới bởi } 0.$$

Ta thấy ngay giá trị của u_n có thể lớn bao nhiêu tuỳ ý, do đó (u_n) không bị chặn trên.

Vậy, dãy (u_n) chỉ bị chặn dưới.

Bài tập 29. Ta có $0 < u_n \leq \frac{1}{2}$ suy ra dãy (u_n) bị chặn.

Bài tập 30. Ta có $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u_n < 1$ suy ra dãy (u_n) bị chặn.

Bài tập 31. Ta có ngay $u_n > 0$.

Mặt khác, ta có $\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$ do đó:

$$u_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) < \frac{3}{4}.$$

Vậy, ta được $0 < u_n < \frac{3}{4}$ suy ra dãy (u_n) bị chặn.

Bài tập 32. Tương tự bài 31 suy ra dãy (u_n) bị chặn.

Bài tập 33.

a. Chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

b. Sử dụng kết quả câu a.

Bài tập 34. Ta có $u_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ suy ra $0 < u_n < 2$ suy ra dãy (u_n) bị chặn.

Bài tập 35. Chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

CHỦ ĐỀ 2

GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa: *Số u được gọi là giới hạn của dãy số* (u_n) *nếu với mọi số* ε *dương tuỳ ý, tồn tại số tự nhiên* N *sao cho với mọi* $n > N$ *thì* $|u_n - u| < \varepsilon$.

Như vậy:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbf{N}^*: |u_n - u| < \varepsilon \text{ với } n > N.$$

2. CÁC ĐỊNH LÍ VỀ GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

Định lí 1: (*Điều kiện cần để dãy số có giới hạn*): *Nếu một dãy số có giới hạn thì nó bị chặn.*

Định lí 2: (*Định lí Vaiơstrat – Điều kiện đủ để dãy số có giới hạn*):

- *Một dãy số tăng và bị chặn trên thì có giới hạn.*
- *Một dãy số giảm và bị chặn dưới thì có giới hạn.*

Định lí 3: (*Tính duy nhất của giới hạn*): *Nếu một dãy số có giới hạn thì giới hạn đó là duy nhất.*

Định lí 4: (*Các phép toán trên các giới hạn của dãy số*): *Nếu hai dãy số* (a_n) *và* (b_n) *có giới hạn thì ta có:*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n.b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n . \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}, \text{ với } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0.$$

Định lí 5: *Nếu hai dãy số* (a_n) *và* (b_n) *có giới hạn và* $a_n \le b_n$ *với* $\forall n > N_0, N_0 \in \mathbf{N}^*$ *thì*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Định lí 6: (*Nguyên lí kẹp giữa*): *Cho ba dãy số* (a_n), (b_n) *và* (c_n) *sao cho* $a_n \le b_n \le c_n$ $\forall n > N_0, N_0 \in \mathbf{N}^*$ *và* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$.

3. CÁC GIỚI HẠN CƠ BẢN

Ta có:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$, với C là hằng số.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha} = 0$, với $\alpha > 0$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, với $|q| < 1$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
LC/1685

4. DÃY SỐ DẦN TỚI VÔ CỰC

***Định nghĩa**: Dãy số (u_n) gọi là dần tới $+\infty$ nếu với mọi số dương M tuỳ ý, tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi $n > N$ thì $u_n > M$.*

Như vậy:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*: u_n > M \text{ với } n > N.$$

Tương tự, ta có định nghĩa:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*: u_n < -M \text{ với } n > N.$$

Ta có các kết quả sau:

1. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \pm\infty$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$.
2. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ thì $\left|\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{u_n}\right| = +\infty$.

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN VÀ BÀI TẬP

Bài toán 1: Sử dụng định nghĩa chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Với $\forall\varepsilon > 0$, xuất phát từ bất đẳng thức:

$$|u_n - u| < \varepsilon \Rightarrow n > g(\varepsilon).$$

Bước 2: Chọn $N = [g(\varepsilon)] + 1$.

Bước 3: Vậy:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*: |u_n - u| < \varepsilon \text{ với } n > N \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = u.$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1. Dùng định nghĩa giới hạn, chứng minh rằng:

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$. b. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+5}{3n+1} = \dfrac{2}{3}$.

Bài tập 2. Dùng định nghĩa giới hạn, chứng minh rằng:

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2+1} = 0$. b. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+4n}{n^2+4n+5} = 1$.

Bài tập 3. Dùng định nghĩa giới hạn, chứng minh rằng:

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) = 0$. b. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) = \dfrac{1}{2}$.

Bài toán 2: Chứng minh một dãy số có giới hạn.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng định lí Vaiơstrat, cụ thể:

- Một dãy số tăng và bị chặn trên thì có giới hạn.
- Một dãy số giảm và bị chặn dưới thì có giới hạn.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 4. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$. Chứng minh rằng dãy số này có giới hạn.

Bài tập 5. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Chứng minh rằng dãy số này có giới hạn.

Bài tập 6. Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}},\ n \geq 2 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng dãy số này có giới hạn.

Bài toán 3: Tính giới hạn của dãy số bằng các định lí về giới hạn.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: Đưa dãy số cần tìm giới hạn về dạng tổng hiệu, tích, thương của những dãy số mà ta đã biết giới hạn.

Ta có các kết quả sau:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$, với C là hằng số.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$, với $\alpha > 0$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, với $|q| < 1$.
4. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = 0$.
5. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ thì $\left|\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{u_n}\right| = +\infty$.

Cách 2: Sử dụng nguyên lí kẹp giữa.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 7. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{3n+2}$.

☐ $\dfrac{2}{3}$. ☐ $\dfrac{3}{2}$. ☐ $-\dfrac{1}{2}$. ☐ $\dfrac{1}{2}$.

b. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+2n+1}{3n^3+2n^2+6}$.

☐ 1. ☐ $\dfrac{1}{3}$. ☐ $\dfrac{1}{6}$. ☐ 0.

c. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+1}{n^2+6}$.

☐ 4. ☐ $\dfrac{2}{3}$. ☐ 0. ☐ $\dfrac{1}{6}$.

d. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n-1}$.

☐ 1. ☐ -1. ☐ 0. ☐ $+\infty$.

Bài tập 8. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+n+1}}{2n+\sqrt{n}+1}$.

☐ ∞. ☐ $\dfrac{1}{2}$. ☐ $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. ☐ $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

b. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[3]{n^3+1}+n\sqrt{n}}{2n\sqrt{n^2+1}+1}$.

☐ $\dfrac{1}{2}$. ☐ $\dfrac{1}{3}$. ☐ $\dfrac{2}{3}$. ☐ ∞.

Bài tập 9. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-n+1}-\sqrt{n^2+1})$.

☐ 0. ☐ $\dfrac{1}{2}$. ☐ $-\dfrac{1}{2}$. ☐ ∞.

b. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-\sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt{n^2+1}-n}$.

☐ $\dfrac{1}{2}$. ☐ 1. ☐ 0. ☐ ∞.

Bài tập 10. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-2^n}{1+2^n}$.

☐ 1. ☐ −1. ☐ 0. ☐ $-\dfrac{1}{3}$.

b. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{n-1}-4^{n+1}}{3^{n+2}+4^{n+2}}$.

☐ $-\dfrac{1}{7}$. ☐ $\dfrac{13}{75}$. ☐ $\dfrac{4}{9}$. ☐ $-\dfrac{1}{4}$.

Bài tập 11. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\ldots+\dfrac{1}{n.(n+1)}\right]$.

☐ 0. ☐ 1. ☐ 2. ☐ ∞.

b. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{5}{n^2}+\ldots+\dfrac{2n-1}{n^2}\right)$.

☐ 0. ☐ 1. ☐ 3. ☐ ∞.

c. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

☐ 0. ☐ 1. ☐ 3. ☐ ∞.

III. HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Với $\forall\varepsilon > 0$, ta xét:

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{n+1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}-1.$$

Chọn $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right]+1$, ta được:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}^*: \left|\frac{n}{n+1}-1\right| < \varepsilon \text{ với } n > N \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1.$$

b. *Bạn đọc tự làm.*

Bài tập 2.

a. Với $\forall\varepsilon > 0$, ta xét:

$$\left|\frac{1}{n^2+1}-0\right| = \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Chọn $N = \left[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]+1$, ta được:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}^*: \left|\frac{1}{n^2+1}-0\right| < \varepsilon \text{ với } n > N \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1} = 0.$$

b. *Bạn đọc tự làm.*

Bài tập 3.

a. Với $\forall\varepsilon > 0$, ta xét:

$$\left|(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})-0\right| = \sqrt{n}-\sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} < \frac{1}{2\sqrt{n-1}} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{1}{4\varepsilon^2}+1.$$

Chọn $N = \left[\frac{1}{4\varepsilon^2}+1\right]+1$, ta được:

$$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}^*: \left|\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right| < \varepsilon \text{ với } n > N \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)=0.$$

b. *Bạn đọc tự làm.*

Bài tập 4. Bằng việc chứng minh (u_n) đơn điệu tăng và bị chặn trên bởi 2 (cụ thể $u_n < 2 - \frac{1}{n}$) chúng ta kết luận được dãy số có giới hạn.

Bài tập 5. Ta sẽ đi chứng minh (u_n) đơn điệu giảm và bị chặn dưới.

a. Vì $u_n > 0$ với mọi n, nên ta xét tỉ số:

$$P = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} : \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+1}.\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}.\frac{n+2}{n+1}$$

$$= \left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1}.\left(1+\frac{1}{n+1}\right).$$

Theo bất đẳng thức Bernoulli $(1+a)^n > 1+na$, do đó:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right) < \left[1+\frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1}$$

suy ra:

$$P < \left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1}.\left[1+\frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} = \left[1-\frac{1}{(n+1)^4}\right]^{n+1} < 1.$$

Vậy, dãy (u_n) giảm.

b. Ta có $u_n > 1$, tức là nó bị chặn dưới.

Vậy, dãy (u_n) có giới hạn.

Bài tập 6. Với các kết quả đã biết trong những bài tập trước ta có (u_n) đơn điệu tăng và bị chặn trên bởi 2 do đó nó có giới hạn.

Bài tập 7.

a. $\frac{2}{3}$.   b. $\frac{1}{3}$.   c. 0.   d. $+\infty$.

Bài tập 8.

a. $\frac{1}{2}$. b. $\frac{1}{2}$.

Bài tập 9.

a. 0. b. 0.

Bài tập 10.

a. -1. b. $-\frac{1}{4}$.

Bài tập 11.

a. Ta có:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{n.(n+1)}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

suy ra:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{n.(n+1)}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

b. Ta có:

$$\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^2}+\ldots+\frac{2n-1}{n^2}=\frac{1}{n^2}[1+3+5+\ldots+(2n-1)]=\frac{1}{n^2}.n^2=1$$

suy ra:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^2}+\ldots+\frac{2n-1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}1=1.$$

c. Đặt $u_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$, ta có nhận xét rằng:

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<u_n<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

trong đó $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1$ và $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$ suy ra $\lim_{n\to\infty}u_n=1$.

CHỦ ĐỀ 3

CẤP SỐ CỘNG

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. ĐỊNH NGHĨA

Dãy số (u_n) *được xác định bởi:*

$$\begin{cases} u_1 = u \\ u_{n+1} = u_n + d, \forall n \in N^* \end{cases}$$

(u, d là hai số thực cho trước) được gọi là cấp số cộng.

- u là số hạng đầu tiên.
- d là công sai.

Đặc biệt khi $d = 0$ thì (u_n) là dãy số trong đó tất cả các số hạng đều bằng nhau.

2. CÁC TÍNH CHẤT

- Số hạng thứ n được cho bởi công thức:

$$u_n = u_1 + (n - 1)d.$$

- u_n, u_{n+1}, u_{n+2} là ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng (u_n) nếu:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n+2}).$$

- Tổng của n số hạng đầu tiên S_n được cho bởi công thức:

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$$

$$= \frac{n}{2}[2u_1 + (n - 1)d].$$

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN VÀ BÀI TẬP

Bài toán 1: Chứng minh tính chất của một cấp số cộng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Câu hỏi thường được đặt ra là:

" *Cho ba số a, b, c lập thành cấp số cộng, chứng minh tính chất K* "

khi đó, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Từ giả thiết a, b, c lập thành một cấp số cộng, ta được:

$$a + c = 2b$$

hoặc biểu thức tương đương $a - b = b - c = \frac{1}{2}(a - c)$.

Bước 2: Chứng minh tính chất K.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 1. Cho ba số a, b, c lập thành một cấp số cộng. Chứng minh rằng:

$$a^2 + 8bc = (2b + c)^2.$$

Bài tập 2. Cho (a_n) là một cấp số cộng. Chứng minh rằng:

a. $a_1 + a_n = a_k + a_{n-k+1}$, với $k = 1, 2, \ldots, n$.

b. $(q - r)a_p + (r - p)a_q + (p - q)a_r = 0$.

c. $$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}},$$

với $a_i > 0$, $i = \overline{1, n}$.

Bài tập 3. Cho (a_n) là một cấp số cộng. Hỏi các dãy số sau có phải là cấp số cộng không ?

a. $a_1, a_3, a_5, \ldots, a_{2n-1}, \ldots$

☐ Là cấp số cộng ☐ Không là cấp số cộng

b. $a_2, a_4, a_6, \ldots, a_{2n}, \ldots$

☐ Là cấp số cộng ☐ Không là cấp số cộng

Bài tập 4. Cho (a_n) là một cấp số cộng. Hỏi các dãy số sau có phải là cấp số cộng không ?

a. $(a_n + p)$, với p là số thực tuỳ ý.

☐ Là cấp số cộng. ☐ Không là cấp số cộng .

b. $(p.a_n)$, với p là số thực tuỳ ý.

☐ Là cấp số cộng. ☐ Không là cấp số cộng .

c. $\left(\frac{p}{a_n}\right)$, với p là số thực tuỳ ý.

☐ Là cấp số cộng ☐ Không là cấp số cộng

Bài toán 2: Chứng minh ba số lập thành một cấp số cộng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để chứng minh ba số a, b, c lập thành cấp số cộng, ta đi chứng minh:

$$a + c = 2b \text{ hoặc } a - b = b - c.$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 5. Cho ba số a^2, b^2, c^2 lập thành một cấp số cộng có công sai khác 0. Chứng minh rằng ba số $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ cũng lập thành một cấp số cộng.

Bài tập 6. Cho ba số dương a, b, c lập thành một cấp số cộng. Chứng minh rằng ba số $\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ cũng lập thành một cấp số cộng.

Bài toán 3: Tìm điều kiện của tham số để ba số lập thành một cấp số cộng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để ba số a, b, c lập thành cấp số cộng, điều kiện là:

$a + c = 2b$, bài toán được chuyển về việc giải phương trình.

Chú ý: Với bài toán "*Tìm điều kiện của tham số để phương trình có các nghiệm lập thành cấp số cộng*" chúng ta cần sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ để thực hiện.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 7. Tìm x để ba số sau lập thành một cấp số cộng:

a. $x^2 - x + 1$, $x - 2$, $1 - 2x$.

☐ $x = 2, x = 3$. ☐ $x = 2, x = 1$. ☐ $x = 4, x = 3$. ☐ $x = 1, x = 4$.

b. $x^3 + x^2 + 1$, $x^2 + 1$, $x^2 - x + 1$.

☐ $x = 0, x = \pm 1$. ☐ $x = 1, x = \pm 2$. ☐ $x = 2, x = \pm 3$. ☐ $x = 3, x = \pm 4$.

Bài tập 8. Xác định a, b để phương trình:

$$x^3 + ax + b = 0$$

có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số cộng.

☐ $b = 0, a < 0$. ☐ $b = 0, a > 0$. ☐ $a = b = 0$. ☐ $a = 1, b = 2$

Bài tập 9. Cho phương trình:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3. Chứng minh rằng 3 nghiệm đó lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi $2a^3 - 9ab + 27c = 0$.

Bài tập 10. Xác định m để các phương trình sau có các nghiệm lập thành một cấp số cộng:

a. $x^3 - 3x^2 + mx + 2 - m = 0$.

☐ $m \le 3$. ☐ $m \ge 3$. ☐ $m = 0$. ☐ m tuỳ ý.

b. $2x^4 + mx^2 + 2 = 0$.

☐ $m = \frac{20}{3}$. ☐ $m = -\frac{20}{3}$. ☐ $m > 4$. ☐ $m < -4$.

c. $x^4 - 2(m + 1)x^2 + 2m + 1 = 0$.

☐ $m = 4$ hoặc $m = \frac{2}{3}$. ☐ $m = 4$ hoặc $m = -\frac{4}{9}$.

☐ $m = 2$ hoặc $m = -\frac{4}{9}$. ☐ $m = 2$ hoặc $m = \frac{2}{3}$.

d. $mx^4 - 2(m - 1)x^2 + m - 1 = 0$.

☐ $m = -\frac{9}{16}$. ☐ $m = \frac{9}{16}$. ☐ $m < 0$. ☐ $m > 0$.

Bài toán 4: Tìm các phần tử của một cấp số cộng (u_n).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Thông thường bài toán được chuyển về xác định u_1 và công sai d.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 11. Cho cấp số cộng (u_n) thoả mãn $u_2 - u_3 + u_5 = 10$ và $u_4 + u_6 = 26$. Tìm số hạng đầu tiên và công sai.

☐ $u_1 = 1$ và $d = 3$. ☐ $u_1 = -1$ và $d = -3$.

☐ $u_1 = -1$ và $d = 3$. ☐ $u_1 = 1$ và $d = -3$.

Bài tập 12. Cho cấp số cộng (u_n) thoả mãn $u_7 - u_3 = 8$ và $u_2.u_7 = 75$. Tìm số hạng đầu tiên và công sai.

☐ $u_1 = -2$ và $d = 2$. ☐ $\left[\begin{array}{l} u_1 = -3 \\ u_1 = 17 \end{array}\right.$ và $d = 2$.

☐ $\left[\begin{array}{l} u_1 = 3 \\ u_1 = -17 \end{array}\right.$ và $d = 2$. ☐ $u_1 = 6$ và $d = 1$.

Bài tập 13. Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 20 và tổng bình phương của chúng bằng 120.

☐ 3; 5; 7; 15 hoặc 15; 7; 5; 3. ☐ 5; 5; 5; 5.

☐ −1; 3; 7; 11 hoặc 11; 7; 3; −1. ☐ 2; 4; 6; 8 hoặc 8; 6; 4; 2.

Bài tập 14. Tìm năm số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 25 và tổng bình phương của chúng bằng 165.

☐ 5; 5; 5; 5; 5.

☐ −5; 0; 5; 10; 15 hoặc 15; 10; 5; 0; −5.

☐ 3; 4; 5; 6; 7 hoặc 7; 6; 5; 4; 3.

☐ 1; 3; 5; 7; 9 hoặc 9; 7; 5; 3; 1.

Bài toán 5: Tính tổng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Thông thường bài toán được chuyển về tính tổng của một cấp số cộng.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 15. Tính tổng sau:

a. $S = 55 + 60 + 65 + \ldots + 855$.

☐ 89355. ☐ 83955. ☐ 83595. ☐ 73255.

b. $S = 999 + 996 + 993 + \ldots + 3$.

☐ 133668. ☐ 166833. ☐ 166338. ☐ 186633.

Bài tập 16. Tính tổng sau:

$$S = 200^2 - 199^2 + 198^2 - 197^2 + \ldots + 2^2 - 1^2.$$

☐ 21000. ☐ 20100. ☐ 20010. ☐ 20001.

III. HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Sử dụng điều kiện $2b = a + c$.

Bài tập 2.

a. Sử dụng công thức $u_n = u_1 + (n - 1)d$.

b. Sử dụng công thức $u_n = u_1 + (n - 1)d$.

c. Ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} = \frac{\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k+1}}}{a_k - a_{k+1}} = -\frac{1}{d}\left(\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k+1}}\right) = \frac{1}{d}\left(\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}\right)$$

suy ra:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{1}{d}\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}\right)$$

$$= \frac{a_n - a_1}{d(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n})} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}, \text{ đpcm.}$$

Bài tập 3.

a. Là cấp số cộng.

b. Là cấp số cộng.

Bài tập 4.

a. Là cấp số cộng.

b. Là cấp số cộng.

c. Không là cấp số cộng.

Bài tập 5. Nhận xét rằng:

$$\frac{1}{b+c} - \frac{1}{c+a} = \frac{c+a-b-c}{(b+c)(c+a)} = \frac{a^2 - b^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}. \quad (1)$$

$$\frac{1}{c+a} - \frac{1}{a+b} = \frac{a+b-c-a}{(c+a)(a+b)} = \frac{b^2 - c^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) do điều kiện ba số a^2, b^2, c^2 lập thành một cấp số cộng suy ra:

$$\frac{1}{b+c} - \frac{1}{c+a} = \frac{1}{c+a} - \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b} = \frac{2}{c+a}$$

$\Leftrightarrow \frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ lập thành một cấp số cộng.

Bài tập 6. Từ giả thiết a, b, c lập thành một cấp số cộng, ta được:

$$a + c = 2b \Leftrightarrow a - b = b - c = \frac{1}{2}(a - c).$$

Nhận xét rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{b-c}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$$

$$=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{a-b}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$$

$$=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{\frac{1}{2}(a-c)}=\frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}.$$

Vậy, ba số $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, $\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$, $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ cũng lập thành một cấp số cộng.

Bài tập 7.

a. $x = 2, x = 3$.

b. $x = 0, x = \pm 1$.

Bài tập 8. $b = 0, a < 0$.

Bài tập 9. Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ ta thực hiện như sau:

Điều kiện cần: Giả sử phương trình có ba nghiệm phân biệt thành cấp số cộng, khi đó:

$$x_1 + x_3 = 2x_2,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a \Leftrightarrow 3x_2 = -a \Leftrightarrow x_2 = -\frac{a}{3}.$$

Với $x_2 = -\frac{a}{3}$ thay vào phương trình đầu ta được:

$$\left(-\frac{a}{3}\right)^3 + a\left(-\frac{a}{3}\right)^2 + b\left(-\frac{a}{3}\right) + c = 0 \Leftrightarrow 2a^3 - 9ab + 27c = 0. \quad (1)$$

Đó chính là điều kiện cần để phương trình ban đầu có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng.

Điều kiện đủ: Từ (1) suy ra phương trình có nghiệm $x_2 = -\frac{a}{3}$. Khi đó:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a \Leftrightarrow x_1 + x_3 - \frac{a}{3} = -a \Leftrightarrow x_1 + x_3 = -\frac{2a}{3} = 2x_2$$

$\Leftrightarrow x_1, x_2, x_3$ lập thành cấp số cộng.

Vậy, điều kiện cần và đủ để (1) có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng là:

$$2a^3 - 9ab + 27c = 0.$$

Bài tập 10.

a. Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ ta thực hiện như sau:

Điều kiện cần: Giả sử phương trình có ba nghiệm phân biệt thành cấp số cộng, khi đó:

$$x_1 + x_3 = 2x_2, \qquad (*)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3 \Leftrightarrow 3x_2 = 3 \Leftrightarrow x_2 = 1.$$

Với $x_2 = -1$ thay vào phương trình ta được:

$$1 - 3 + m + 2 - m = 0 \text{ luôn đúng.}$$

Điều kiện đủ: Viết lại phương trình dưới dạng:

$$(x - 1)(x^2 - 2x - 2 + m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_2 = 1 \\ x^2 - 2x - 2 + m = 0 \quad (**) \end{array}\right.$$

Khi đó, ta cần có điều kiện để phương trình (**) có hai nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 1 + 2 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 3.$$

Vậy, với $m \leq 3$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. $m = -\dfrac{20}{3}$.   c. $m = 4$ hoặc $m = -\dfrac{4}{9}$.   d. $m = -\dfrac{9}{16}$.

Bài tập 11. $u_1 = 1$ và $d = 3$.

Bài tập 12. $u_1 = 3$ hoặc $u_1 = -17$ và $d = 3$.

Bài tập 13. 2; 4; 6; 8 hoặc 8; 6; 4; 2.

Bài tập 14. 1; 3; 5; 7; 9 hoặc 9; 7; 5; 3; 1.

Bài tập 15. **S = 73255.**

a. S = 73255.   b. S = 166833.

Bài tập 16. S = 20100.

CHỦ ĐỀ 4

CẤP SỐ NHÂN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. ĐỊNH NGHĨA

Dãy số (u_n) *được xác định bởi:*

$$\begin{cases} u_1 = u \\ u_{n+1} = u_n\, q,\ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

(u, q là hai số thực khác 0 cho trước) được gọi là cấp số nhân.

- u là số hạng đầu tiên.
- q là công bội.

Đặc biệt khi $q = 1$ thì (u_n) là dãy số trong đó tất cả các số hạng đều bằng nhau.

2. CÁC TÍNH CHẤT

- Số hạng thứ n được cho bởi công thức $u_n = u_1.q^{n-1}$.
- u_n, u_{n+1}, u_{n+2} là ba số hạng liên tiếp của cấp số nhân (u_n) nếu:

  $$u_{n+1}^2 = u_n.u_{n+2}.$$

- Tổng của n số hạng đầu tiên S_n được cho bởi công thức:

  $$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_1.\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

  $$S = u_1 + u_2 + \ldots = \frac{u_1}{1 - q},\ \text{với } |q| < 1.$$

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN VÀ BÀI TẬP

Bài toán 1: Chứng minh tính chất của một cấp số nhân.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Câu hỏi thường được đặt ra là:

" *Cho ba số a, b, c lập thành cấp số nhân, chứng minh tính chất K* "

khi đó, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Từ giả thiết a, b, c lập thành một cấp số nhân, ta được $a.c = b^2$.

Bước 2: Chứng minh tính chất K.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 1. Cho ba số a, b, c lập thành một cấp số nhân. Chứng minh rằng:

a. $(ab + bc + ca)^3 = abc(a + b + c)^3$.

b. $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$.

c. $\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right)a^2b^2c^2 = a^3 + b^3 + c^3$.

Bài tập 2. Cho cấp số nhân (a_n). Có thể (a_n) cũng lập thành một cấp số cộng hay không ?

Bài tập 3. Cho (a_n) là một cấp số nhân. Hỏi các dãy số sau có phải là cấp số nhân không ?

a. $a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2n-1}, \dots$

☐ Là cấp số nhân. ☐ Không là cấp số nhân.

b. $a_2, a_4, a_6, \dots, a_{2n}, \dots$

☐ Là cấp số nhân. ☐ Không là cấp số nhân.

Bài tập 4. Cho (a_n) là một cấp số nhân với công bội $q \neq 1$ và $a_1 \neq 0$. Hỏi các dãy số sau có phải là cấp số nhân không ?

a. $(a_n + p)$, với p là số thực tuỳ ý.

☐ Là cấp số nhân ☐ Không là cấp số nhân

b. $(p.a_n)$, với p là số thực khác 0.

☐ Là cấp số nhân ☐ Không là cấp số nhân

c. $\left(\frac{p}{a_n}\right)$, với p là số thực khác 0.

☐ Là cấp số nhân ☐ Không là cấp số nhân

d. (a_n^k), với $k \in \mathbf{Z}^+$.

☐ Là cấp số nhân ☐ Không là cấp số nhân

Bài toán 2: Chứng minh ba số lập thành một cấp số nhân.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để chứng minh ba số a, b, c lập thành cấp số nhân, ta đi chứng minh:

$$ac = b^2.$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 5. Cho ba số dương a, b, c lập thành một cấp số nhân. Chứng minh rằng ba số $\sqrt[3]{abc}$, $\sqrt{ab + bc + ca}$, $a + b + c$ lập thành một cấp số nhân.

Bài tập 6. Cho ba số a, b, c thoả mãn $(a^2 + b^2)(b^2 + c^2) = (ab + bc)^2$. Chứng minh rằng a, b, c lập thành một cấp số nhân.

Bài toán 3: Tìm điều kiện của tham số để ba số lập thành một cấp số nhân.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để ba số a, b, c lập thành cấp số nhân, điều kiện là:

$ac = b^2$, bài toán được chuyển về việc giải phương trình.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 7. Tìm x để ba số x, x − 4, 2x − 2 lập thành một cấp số nhân.

☐ $x = 2, x = -8$. ☐ $x = -2, x = -8$.

☐ $x = 2, x = 8$. ☐ $x = -2, x = 8$.

Bài tập 8. Giả sử các số $5x - y$, $2x + 3y$, $x + 2y$ lập thành một cấp số cộng, còn các số $(y + 1)^2$, $xy + 1$, $(x - 1)^2$ lập thành một cấp số nhân. Tìm x và y.

☐ $(0; 0)$ và $(-\frac{3}{4}; -\frac{3}{10})$. ☐ $(\frac{10}{3}; \frac{4}{3})$ và $(-\frac{3}{4}; -\frac{3}{10})$.

☐ $(\frac{10}{3}; \frac{4}{3})$ và $(0; 0)$. ☐ $(0; 0)$ và $(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$.

Bài tập 9. Tính x theo a, b, c để ba số x + a, x + b, x + c lập thành một cấp số nhân.

☐ $x = \frac{a^2 - bc}{2a - b - c}$. ☐ $x = \frac{c^2 - ab}{a + b - 2c}$.

☐ $x = \frac{b^2 - ac}{a - 2b + c}$. ☐ $x = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c}$.

Bài tập 10. Xác định m để phương trình:

$$x^3 - 3mx^2 + 4mx + m - 2 = 0$$

có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số nhân.

☐ $m = -\frac{10}{27}$. ☐ $m = 2$ hoặc $m = -\frac{1}{2}$.

☐ $m = 0$ hoặc $m = -6$. ☐ $m = 1$ hoặc $m = -6$.

Bài toán 4: Tìm các phần tử của một cấp số nhân (u_n).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Thông thường bài toán được chuyển về xác định u_1 và công bội q.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 11. Tìm số hạng đầu tiên và công bội của cấp số nhân (u_n) thoả mãn $u_3 = 15$ và $u_5 = 135$.

☐ $u_1 = \frac{5}{3}$ và $q = \pm 3$. ☐ $u_1 = 5$ và $q = \pm\sqrt{3}$.

☐ $u_1 = 1$ và $q = \pm\sqrt{15}$. ☐ $u_1 = \frac{3}{5}$ và $q = \pm 5$.

Bài tập 12. Cho cấp số nhân (u_n) thoả mãn $u_4 - u_2 = 12$ và $u_5 - u_3 = 24$.

a. Tìm số hạng đầu tiên và công bội.

☐ $u_1 = 4$ và $q = 2$. ☐ $u_1 = 1$ và $q = 3$.

☐ $u_1 = 2$ và $q = 2$. ☐ $u_1 = -1$ và $q = -3$.

b. Tính tổng số của 10 số hạng đầu tiên.

☐ 6204. ☐ 4620. ☐ 462. ☐ 2046.

c. Tính tổng S' = $u_3 + u_6 + \ldots + u_{12}$.

☐ 4680. ☐ 8460. ☐ 6480. ☐ 4068.

Bài tập 13. Tìm số hạng đầu tiên và công bội của cấp số nhân (u_n) thoả mãn $u_1 + u_6 = 244$ và $u_3 + u_4 = 36$.

☐ $u_1 = 1$ và $q = 3$ hoặc $u_1 = 243$ và $q = \frac{1}{3}$.

☐ $u_1 = 2$ và $q = \frac{5}{2}$ hoặc $u_1 = 242$ và $q = \frac{2}{5}$.

☐ $u_1 = 3$ và $q = 2$ hoặc $u_1 = 241$ và $q = \frac{1}{2}$.

☐ $u_1 = 4$ và $q = \frac{3}{2}$ hoặc $u_1 = 240$ và $q = \frac{2}{3}$.

Bài tập 14. Cho cấp số nhân (u_n) thoả mãn $u_2 + u_4 = 10$ và $u_1 + u_3 + u_5 = -21$. Tìm số hạng đầu tiên và công bội.

☐ $u_1 = -16$ và $q = -2$ hoặc $u_1 = -1$ và $q = -\frac{1}{2}$.

☐ $u_1 = -16$ và $q = -\frac{1}{2}$ hoặc $u_1 = -1$ và $q = -2$.

☐ $u_1 = 16$ và $q = -\frac{1}{2}$ hoặc $u_1 = 1$ và $q = -2$.

☐ $u_1 = 16$ và $q = -2$ hoặc $u_1 = 1$ và $q = -\frac{1}{2}$.

Bài tập 15. Cho ba số khác nhau lập thành một cấp số cộng, bình phương của các số ấy lập thành một cấp số nhân. Tìm ba số đó.

Bài toán 5: Tính tổng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Thông thường bài toán được chuyển về tính tổng của một cấp số nhân.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 16. Tính tổng sau:

$$S = 1 + 4 + 16 + \ldots + 65536.$$

☐ 87381. ☐ 78381. ☐ 38871. ☐ 87138.

Bài tập 17. Tính tổng sau:

$$S = 3 - 15 + 75 - \ldots - 234375.$$

☐ −130208. ☐ 130208. ☐ −195312. ☐ 310208.

Bài tập 18. Tính tổng sau:

$$S = 1 + 4.2 + 7.2^2 + 10.2^3 + \ldots + 288.2^{99}.$$

☐ $288.2^{100} + 1$. ☐ $300.2^{100} + 1$.

☐ $285.2^{100} + 5$. ☐ $300.2^{100} + 6$.

Bài tập 19. Tính tổng sau:

$$S = 1 + 2.3 + 3.3^2 + \ldots + 100.3^{99}.$$

☐ $199.3^{100} + 1$. ☐ $\frac{1}{3}(199.3^{100} + 1)$.

☐ $\frac{1}{2}(199.3^{100} + 1)$. ☐ $99.3^{100} + 1$.

Bài tập 20. Tính tổng sau:

$$S = 6 + 66 + 666 + \ldots + \underbrace{66\ldots6}_{\text{n chữ số}}.$$

☐ $10^{n+1} - 10 - 9n$. ☐ $10^{n+1} + 10 + 9n$.

☐ $\frac{2}{27}(10^{n+1} - 10 - 9n)$. ☐ $\frac{1}{81}(10^{n+1} - 10 - 9n)$.

Bài tập 21. Tính tổng sau:

$$S = \left(3 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(3^2 + \frac{1}{3^2}\right)^2 + \ldots + \left(3^n + \frac{1}{3^n}\right)^2.$$

III. HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Với ba số a, b, c lập thành một cấp số nhân ta được $b^2 = ac$.

a. Ta có:

$$(ab + bc + ca)^3 = (ab + bc + b^2)^3 = b^3(a + b + c)^3 = b.b^2(a + b + c)^3$$
$$= abc(a + b + c)^3, \text{ đpcm.}$$

b. Ta có:

$$(a + b + c)(a - b + c) = (a + c)^2 - b^2 = a^2 + 2ac + c^2 - ac = a^2 + ac + c^2$$
$$= a^2 + b^2 + c^2, \text{ đpcm.}$$

c. Ta có:

$$\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right)a^2b^2c^2 = \frac{b^2c^2}{a} + \frac{a^2c^2}{b} + \frac{a^2b^2}{c} = \frac{ac^3}{a} + \frac{b^4}{b} + \frac{a^3c}{c}$$
$$= a^3 + b^3 + c^3, \text{ đpcm.}$$

Bài tập 2. Nếu cấp số nhân (a_n) có $q = 1$ thì (a_n) cũng lập thành một cấp số cộng có $d = 0$.

Bài tập 3.

a. Là cấp số nhân. b. Là cấp số nhân.

Bài tập 4.

a. Không là cấp số nhân. c. Là cấp số nhân.

b. Là cấp số nhân. d. Là cấp số nhân.

Bài tập 5. Với ba số a, b, c lập thành một cấp số nhân ta được $b^2 = ac$.

Khi đó:

$$(\sqrt{ab + bc + ca})^2 = ab + bc + ca = ab + bc + b^2 = b(a + b + c)$$

$$= \sqrt[3]{b^3}\,(a + b + c) = \sqrt[3]{b^2.b}\,(a + b + c) = \sqrt[3]{abc}\,(a + b + c)$$

$\Leftrightarrow$ ba số $\sqrt[3]{abc}$, $\sqrt{ab + bc + ca}$, $a + b + c$ lập thành một cấp số nhân.

Bài tập 6. Biến đổi biểu thức:

$$(a^2 + b^2)(b^2 + c^2) = (ab + bc)^2 \Leftrightarrow a^2c^2 + b^4 = 2ab^2c \Leftrightarrow (ac - b^2)^2 = 0$$

$\Leftrightarrow b^2 = ac \Leftrightarrow$ ba số a, b, c lập thành một cấp số nhân.

Bài tập 7. $x = 2$, $x = -8$.

Bài tập 8. Ta lần lượt sử dụng các giả thiết:

a. Các số $5x - y$, $2x + 3y$, $x + 2y$ lập thành một cấp số cộng, suy ra:

$$5x - y + x + 2y = 2(2x + 3y) \Leftrightarrow 2x = 5y. \qquad (1)$$

b. Các số $(y + 1)^2$, $xy + 1$, $(x - 1)^2$ lập thành một cấp số nhân, suy ra:

$$(y + 1)^2(x - 1)^2 = (xy + 1)^2 \Leftrightarrow (y + 1)(x - 1) = \pm(xy + 1).$$

- Với $(y + 1)(x - 1) = (xy + 1)$, ta được:

$$(y + 1)(2x - 2) = (2xy + 2) \Leftrightarrow (y + 1)(5y - 2) = (5y^2 + 2)$$

$$\Leftrightarrow 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{10}{3}.$$

- Với $(y + 1)(x - 1) = -(xy + 1)$, ta được:

$$(y + 1)(2x - 2) = -(2xy + 2) \Leftrightarrow (y + 1)(5y - 2) = -(5y^2 + 2)$$

$$\Leftrightarrow 10y^2 + 3y = 0 \overset{y=0\text{ loại}}{\Rightarrow} y = -\frac{3}{10} \Rightarrow x = -\frac{3}{4}.$$

Bài tập 9. Để ba số $x + a$, $x + b$, $x + c$ lập thành một cấp số nhân điều kiện là:

$$(x + a)(x + c) = (x + b)^2 \Leftrightarrow (a - 2b + c)x = b^2 - ac \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b + c \neq 0 \\ x = \dfrac{b^2 - ac}{a - 2b + c} \end{cases}$$

Bài tập 10. $m = -\frac{10}{27}$.

Bài tập 11. $u_1 = \frac{5}{3}$ và $q = \pm 3$.

Bài tập 12. $u_1 = 2$ và $q = 2$; $S = 2046$; $S' = 4680$..

Bài tập 13. $u_1 = 1$ và $q = 3$ hoặc $u_1 = 243$ và $q = \frac{1}{3}$.

Bài tập 14. Gọi $q \neq 0$ là công bội của cấp số nhân (u_n), ta có:

$$\begin{cases} u_2 + u_4 = 10 \\ u_1 + u_3 + u_5 = -21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q(1+q^2) = 10 \\ u_1.(1+q^2+q^4) = -21 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{q(1+q^2)}{1+q^2+q^4} = -\frac{10}{21} \Leftrightarrow 10q^4 + 21q^3 + 10q^2 + 21q + 10 = 0. \qquad (1)$$

Chia cả hai vế của (1) cho $q^2 \neq 0$, ta được:

$$10(q^2 + \frac{1}{q^2}) + 21(q + \frac{1}{q}) + 10 = 0. \qquad (2)$$

Đặt $t = q + \frac{1}{q}$, điều kiện $|t| \geq 2$, suy ra $q^2 + \frac{1}{q^2} = t^2 - 2$ và khi đó (2) có dạng:

$$10(t^2 - 2) + 21t + 10 = 0 \Leftrightarrow 10t^2 + 21t - 10 = 0 \overset{|t|\geq 2}{\Rightarrow} t = -\frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow q + \frac{1}{q} = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2 + 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = -\frac{1}{2} \text{ hoặc } q = -2.$$

- Với $q = -\frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = -16$.
- Với $q = -2 \Rightarrow u_1 = -1$.

Vậy, tồn tại hai cấp số nhân thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 15. Ba số khác không bằng nhau bất kì.

Bài tập 16. 87381.

Bài tập 17. -195312.

Bài tập 18. Ta có ngay:

$$S = 1 + 4.2 + 7.2^2 + 10.2^3 + \ldots + 288.2^{99}.$$

$$2S = \quad 1.2 + 4.2^2 + 7.2^3 + 10.2^4 + \ldots + 288.2^{100}.$$

Khi đó:

$$S = 2S - S = 288.2^{100} - 3(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{99}) + 2$$

$$= 288.2^{100} - \frac{3(2^{100} - 1)}{2 - 1} + 2 = 285.2^{100} + 5.$$

Bài tập 19. Ta có ngay:

$$S = 1 + 2.3 + 3.3^2 + \ldots + 100.3^{99}.$$

$$3S = \quad 1.3 + 2.3^2 + 3.3^3 + \ldots + 100.3^{100}.$$

Lấy (2) trừ (1), ta được:

$$2S = 3S - S = 100.3^{100} - (1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{99})$$

$$= 100.3^{100} - \frac{3^{100} - 1}{3 - 1} = \frac{1}{2}(199.3^{100} + 1).$$

Bài tập 20. Ta viết lại $S = 6(1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{11\ldots1}_{\text{n chữ số}})$.

Xét hai dãy số:

- Cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 1$ và công bội $q = 10$.
- Dãy số $(s_n) = \{1, 11, 111, \ldots, \underbrace{11\ldots1}_{\text{n chữ số}}\}$.

Suy ra s_n là tổng n số hạng đầu của cấp số nhân (u_n), tức là:

$$s_n = \frac{10^n - 1}{10 - 1} = \frac{1}{9}(10^n - 1).$$

Khi đó, ta nhận được:

$$S = 6(s_1 + s_2 + \ldots + s_n) = 6\sum_{k=1}^{n} s_k = 6\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{9}(10^k - 1) = \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}10^k - \frac{2n}{3}$$

$$= \frac{2}{3}.10.\frac{10^n - 1}{10 - 1} - \frac{2n}{3} = \frac{2}{27}(10^{n+1} - 10 - 9n).$$

Bài tập 21. Ta viết lại:

$$S = (9 + 9^2 + \ldots + 9^n) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \ldots + \frac{1}{9^n}\right) + 2n$$

$$= \frac{9(9^n - 1)}{9 - 1} + \frac{\frac{1}{9}\left(\frac{1}{9^n} - 1\right)}{\frac{1}{9} - 1} + 2n$$ – *Bạn đọc biến đổi tiếp.*

CHƯƠNG II

GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

CHỦ ĐỀ 1

ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁC ĐỊNH LÍ VỀ GIỚI HẠN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa 1: *Cho hàm số* y = f(x) *xác định trên một khoảng* K, *có thể trừ ở một điểm* $x_0 \in K$.

Số l được gọi là giới hạn của hàm số f(x) *khi* x *tiến tới* x_0 *khi với mọi số dương ε tuỳ ý tồn tại một số dương δ sao cho* $|x - x_0| < \delta$ *thì* $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Như vậy:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \text{ ta có } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Định nghĩa 2: (*Định nghĩa giới hạn của hàm số bằng giới hạn của dãy số*) :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \text{Với mọi dãy } \{x_n\} \to x_0 \text{ ta có } f(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} l.$$

2. CÁC ĐỊNH LÍ VỀ GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

Định lí 1: (*Tính duy nhất của giới hạn*): *Nếu một hàm số có giới hạn thì giới hạn đó là duy nhất.*

Định lí 2: (*Các phép toán trên các giới hạn của hàm số*): *Nếu hai hàm số f(x) và g(x) có giới hạn khi* $x \to x_0$ *thì ta có:*

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x).g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x). \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}, \text{ với } \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0.$$

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \to x_0} f(x)}, \text{ với } f(x) \geq 0.$$

Định lí 3: (*Nguyên lí kẹp giữa*): *Cho ba hàm số f(x), g(x) và h(x) sao cho* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *và* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$.

3. GIỚI HẠN CƠ BẢN

Ta có:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$, với C là hằng số.
2. Nếu hàm số f(x) xác định tại điểm x_0 thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

4. GIỚI HẠN MỘT PHÍA

***Định nghĩa 3**: Ta có:*

a. ***Giới hạn trái**:*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : -\delta < x - x_0 < 0 \text{ thì } |f(x) - a| < \varepsilon.$$

b. ***Giới hạn phải:***

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < x - x_0 < \delta \text{ thì } |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Định lí 4: Điều kiện cần và đủ để $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ là $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a$.

5. GIỚI HẠN Ở VÔ CỰC

***Định nghĩa 4**: Ta có:*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 : |x| > A \text{ ta có } |f(x) - a| < \varepsilon.$$

***Định nghĩa 5**: Ta có:*

a. ***Giới hạn trái ở vô cực**:*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M < 0 : x < M \text{ ta có } |f(x) - a| < \varepsilon.$$

b. ***Giới hạn phải ở vô cực**:*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 : x > M \text{ ta có } |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Định lí 5: Điều kiện cần và đủ để $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$ là $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$.

Định lí 6: (*Nguyên lí kẹp giữa*): *Cho ba hàm số $f(x)$, $g(x)$ và $h(x)$ sao cho $f(x) \le g(x) \le h(x)$ và* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = L$ thì $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = L$.

6. GIỚI HẠN VÔ CỰC

***Định nghĩa 6**: Ta có:*

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall c > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta$ ta có $|f(x)| > c$.

II.PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN VÀ BÀI TẬP

Bài toán 1: Sử dụng định nghĩa chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Với $\forall \varepsilon > 0$, xuất phát từ bất đẳng thức:

$$|f(x) - a| < \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| < g(\varepsilon).$$

Bước 2: Đặt $\delta = g(\varepsilon)$.

Bước 3: Vậy, ta được:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = g(\varepsilon) > 0 : |x - x_0| < \delta \text{ ta có } |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1. Dùng định nghĩa chứng minh rằng:

a. $\lim\limits_{x\to 1}(3x-1)=2.$ b. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x-4)=4.$

Bài tập 2. Dùng định nghĩa chứng minh rằng:

a. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{6}{x}=-3.$ b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-2x+8}{x+1}=8.$

Bài tập 3. Dùng định nghĩa chứng minh rằng:

a. $\lim\limits_{x\to x_0} kx = kx_0.$ c. $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0.$

b. $\lim\limits_{x\to x_0}(ax+b)=ax_0+b.$ d. $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0.$

Bài tập 4. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|a|.$

Bài toán 2: Sử dụng định nghĩa chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a.$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Với $\forall\varepsilon>0$, xuất phát từ bất đẳng thức:

$$|f(x)-a|<\varepsilon \Rightarrow |x|>g(\varepsilon).$$

Bước 2: Đặt $A=g(\varepsilon)$.

Bước 3: Vậy, ta được:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists A=g(\varepsilon)>0:\ |x|>A \text{ ta có } |f(x)-a|<\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x)=a.$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 5. Dùng định nghĩa chứng minh rằng:

a. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x+1}=0.$ b. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{x-1}=2.$

Bài tập 6. Dùng định nghĩa chứng minh rằng:

a. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2+1}=0.$ b. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2+1}=3.$

Bài toán 3: Sử dụng định nghĩa chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty.$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Với $\forall\varepsilon>0$, xuất phát từ bất đẳng thức:

$$|f(x)|>c \Rightarrow |x-x_0|<g(c).$$

Bước 2: Đặt $\delta=g(\varepsilon)$.

Bước 3: Vậy, ta được:

$\forall c > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta$ ta có $|f(x)| > c$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, đpcm.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 7. Dùng định nghĩa chứng minh rằng:

a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = \infty.$ b. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x}{x-2} = \infty.$

Bài tập 8. Dùng định nghĩa chứng minh rằng:

a. $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{\sqrt{x-3}} = +\infty.$ b. $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty.$

Bài toán 4: Chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ không tồn tại.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chọn hai dãy số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ với

- $x_n \to x_0$ khi $n \to \infty$, khi đó đánh giá $f(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} L_1$.
- $y_n \to x_0$ khi $n \to \infty$, khi đó đánh giá $f(y_n) \xrightarrow{n \to \infty} L_2$.

Bước 2: Nhận xét rằng $L_1 \neq L_2$.

Bước 3: Vậy, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ không tồn tại.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 9. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to 0} \sin\dfrac{1}{x}$ không tồn tại.

Bài tập 10. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to 0} \cos\dfrac{1}{x}$ không tồn tại.

Bài tập 11. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to \infty} \sin 2x$ không tồn tại.

Bài tập 12. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to 1} \sin\dfrac{1}{x-1}$ không tồn tại.

Bài toán 5: Giới hạn của hàm số kép.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \text{ khi } x < x_0 \\ f_2(x) \text{ khi } x \geq x_0 \end{cases}.$$

Để tính giới hạn hoặc xác định giá trị của tham số để hàm số có giới hạn khi $x \to x_0$, ta thực hiện theo các bước sau :

Bước 1: Tính giới hạn các giới hạn:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f_1(x) = L_1.$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f_2(x) = L_2.$$

Bước 2: Khi đó :

- Nếu $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = L$.
- Để hàm số có giới hạn khi x→ x_0 điều kiện là :

  $L_1 = L_2 \Rightarrow$ Giá trị của *tham số*.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 13. Cho hàm số :

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ khi } x < 0 \\ x^2 \quad \text{khi } x \geq 0 \end{cases}.$$

a. Tính giới hạn $\lim_{x \to 0^-} f(x)$.

☐ 0. ☐ 1. ☐ −1. ☐ 2.

b. Tính giới hạn $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

☐ 0. ☐ 1. ☐ −1. ☐ 2.

c. Giới hạn $\lim_{x \to 0} f(x)$ có tồn tại không ?

☐ Có tồn tại. ☐ Không tồn tại.

Bài tập 14. Cho hàm số :

$$f(x) = \frac{|x|}{x}.$$

a. Tính giới hạn $\lim_{x \to 0^-} f(x)$.

☐ 0. ☐ 1. ☐ −1. ☐ −∞.

b. Tính giới hạn $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

☐ 0. ☐ 1. ☐ −1. ☐ +∞.

c. Giới hạn $\lim_{x \to 0} f(x)$ có tồn tại không ?

☐ Có tồn tại. ☐ Không tồn tại.

Bài tập 15. Cho hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} x + 3a \text{ khi } x < 0 \\ x^2 + a + 2 \text{ khi } x \geq 0 \end{cases}.$$

Tìm a để hàm số có giới hạn khi x→ 0.

☐ a = −1. ☐ a = 0. ☐ a = 1. ☐ a = 2.

Bài tập 16. Cho hàm số :

$$f(x) = \begin{cases} x + 3a & \text{khi } x < -1 \\ x^2 + x + a + 3 & \text{khi } x \geq -1 \end{cases}.$$

Tìm a để hàm số có giới hạn khi $x \to -1$.

☐ $a = -1$. ☐ $a = 0$. ☐ $a = 1$. ☐ $a = 2$.

Bài toán 6: Sử dụng nguyên lí kẹp giữa tìm giới hạn của hàm số.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Giả sử cần tính giới hạn của hàm số $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ (hoặc $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$), ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chọn hai hàm số g(x), h(x) thoả mãn:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x).$$

Bước 2: Khẳng định:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L \text{ (hoặc } \lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} h(x) = L.).$$

Bước 3: Kết luận:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L \text{ (hoặc } \lim_{x \to \infty} f(x) = L).$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 17. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to 0} x\cos\frac{1}{x}$.

☐ 0. ☐ 1. ☐ $+\infty$. ☐ $-\infty$.

Bài tập 18. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to 0} x^2\sin\frac{1}{x}$.

☐ 0. ☐ 1. ☐ $+\infty$. ☐ $-\infty$.

Bài tập 19. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x - \cos x}{x + \cos x}$.

☐ 0. ☐ 1. ☐ -1. ☐ ∞.

Bài toán 7: Dùng các định lí về giới hạn và giới hạn cơ bản để tìm giới hạn.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng kết quả của định lí 2 và các giới hạn cơ bản sau:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$, với C là hằng số.
2. Nếu hàm số f(x) xác định tại điểm x_0 thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
3. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0$, với $n > 0$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 20. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to 1} (2x + 4)$.

☐ 6. ☐ 2. ☐ 4. ☐ 11.

b. $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 + 4x + 3)$.

☐ 3. ☐ 24. ☐ 0. ☐ 21.

c. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x - 1}$.

☐ 2. ☐ 9. ☐ −3. ☐ $-\dfrac{1}{3}$.

Bài tập 21. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{x^2 - 4}$.

☐ 2. ☐ $-\infty$. ☐ $+\infty$. ☐ $\dfrac{1}{4}$.

b. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$.

☐ 1. ☐ $-\infty$. ☐ $+\infty$. ☐ −1.

c. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 9}$.

☐ 3. ☐ $-\infty$. ☐ $+\infty$. ☑ $\dfrac{1}{3}$.

d. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 6x + 5}{x^3 + 2x^2 - 1}$

☐ −1. ☐ −4. ☐ $-\infty$. ☐ $+\infty$.

Bài tập 22. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 3x + 2}$.

☐ 1. ☐ $-\infty$. ☐ $+\infty$. ☐ $-\dfrac{1}{2}$.

b. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x + 2} - 2}{\sqrt{2x} - 2}$.

☐ 2. ☐ $-\infty$. ☐ $+\infty$. ☐ $\dfrac{1}{2}$.

Bài tập 23. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+1}{x-1}$.

☐ 1. ☐ 2. ☐ 0. ☐ ∞.

b. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+1}{x^2-1}$.

☐ 2. ☐ 1. ☐ −1. ☐ 0.

III. HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Với $\forall \varepsilon > 0$ xét:

$$|f(x) - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow |(3x-1) - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow 3|x-1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Đặt $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Vậy $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \frac{\varepsilon}{3} > 0$ sao cho $|x-1| < \delta$ ta có :

$$|f(x) - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \to 1}(3x-1) = 3, \text{ đpcm.}$$

b. Với $\forall \varepsilon > 0$ xét:

$$|f(x) - 4| = |(x^2 + 2x - 4) - 4| = |(x-2)^2 + 6(x-2)| \le |x-2|^2 + 6|x-2| \le \varepsilon$$

$$\Rightarrow 0 < |x-2| < \sqrt{9+\varepsilon} - 3 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{9+\varepsilon}+3}.$$

Đặt $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{9+\varepsilon}+3}$. Vậy $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{9+\varepsilon}+3} > 0$ sao cho $|x-2| < \delta$ ta có:

$$|f(x) - 4| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \to 2}(x^2 + 2x - 4) = 4, \text{ đpcm.}$$

Bài tập 2.

a. Với $\forall \varepsilon > 0$ xét:

$$|f(x) + 3| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{6}{x} + 3\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{x+2}{x}\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Xét một lân cận của -2 chẳng hạn $\left(-2 - \frac{1}{2}; -2 + \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$. Khi đó x thuộc lân cận này khi và chỉ khi:

$$\frac{3}{2} < |x| < \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{5} < \frac{1}{|x|} < \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{5} < \left|\frac{x+2}{x}\right| < \frac{2}{3}|x+2|$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2}\left|\frac{x+2}{x}\right| < |x+2| < \frac{3}{2}\left|\frac{x+2}{x}\right|$$

Do đó, ta chọn $\delta = \min(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}.\frac{\varepsilon}{3}) = \min(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2})$.

Vậy $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta = \min(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}) > 0$ sao cho $|x + 2| < \delta$ ta có:

$$|f(x) + 3| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \to -2} \frac{6}{x} = -3, \text{ đpcm.}$$

b. *Bạn đọc tự làm.*

Bài tập 3.

a. Với $\forall\varepsilon > 0$ xét:

$$|kx - kx_0| < \varepsilon \Leftrightarrow |k|.|x - x_0| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{|k|}.$$

Đặt $\delta = \frac{\varepsilon}{|k|}$.

Vậy $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta = \frac{\varepsilon}{|k|} > 0$ sao cho $|x - x_0| < \delta$ ta có :

$$|kx - kx_0| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} kx = kx_0, \text{ đpcm.}$$

b. *Bạn đọc tự làm.*

c. Xét:

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2\cos\frac{x + x_0}{2}.\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \le \left|2\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \le |x - x_0|$$

Do đó, với $\varepsilon > 0$ cho trước ta chọn $\delta < \varepsilon$ thì với $|x - x_0| < \delta$ ta được:

$$|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0, \text{ đpcm.}$$

d. *Bạn đọc tự làm.*

Bài tập 4. Ta có:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \text{ sao cho } |x - x_0| < \delta \text{ ta có } |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Mặt khác:

$$||f(x)| - |a|| \le |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Như vậy, với $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ sao cho $|x - x_0| < \delta$ ta có:

$$||f(x)| - |a|| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} |f(x)| = |a|, \text{ đpcm.}$$

Bài tập 5.

a. Với $\forall\varepsilon > 0$ xét bất đẳng thức:

$$|f(x) - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x + 1} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x + 1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x + 1| > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow x > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \text{ hoặc } x < -\frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Do đó, với $\varepsilon > 0$ cho trước ta chọn $A = \frac{1}{\varepsilon} + 1$ thì với $|x| > A$ ta được:

$$|f(x) - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x + 1} = 0, \text{ đpcm.}$$

b. *Bạn đọc tự làm.*

Bài tập 6. *Bạn đọc tự làm.*

Bài tập 7.

a. Với mọi c > 0 tuỳ ý, xét:

$$|f(x)| > c \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x}\right| > c \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{c}.$$

Đặt $\delta = \frac{1}{c}$.

Vậy $\forall c > 0, \exists \delta = \frac{1}{c} > 0$ sao cho $|x| < \delta$ ta có:

$$|f(x)| > c \Leftrightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = \infty, \text{ đpcm.}$$

b. *Bạn đọc tự làm.*

Bài tập 8.

a. Với mọi c > 0 tuỳ ý, xét:

$$|f(x)| > c \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x-3}} > c \Leftrightarrow \sqrt{x-3} < \frac{1}{c} \Leftrightarrow 0 < x - 3 < \frac{1}{c^2}.$$

Đặt $\delta = \frac{1}{c^2}$.

Vậy $\forall c > 0, \exists \delta = \frac{1}{c^2} > 0$ sao cho $0 < x - 3 < \delta$ ta có:

$$|f(x)| > c \Leftrightarrow \lim_{x \to 3} f(x) = \infty, \text{ đpcm.}$$

b. *Bạn đọc tự làm.*

Bài tập 9. Đặt $f(x) = \sin\frac{1}{x}$.

Chọn hai dãy số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ với:

- $x_n = \frac{1}{n\pi} \Rightarrow x_n \to 0$ khi $n \to \infty$ và ta được:

$$f(x_n) = \sin\frac{1}{x_n} = \sin(n\pi) \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

- $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \Rightarrow y_n \to 0$ khi $n \to \infty$ và ta được:

$$f(y_n) = \sin\frac{1}{y_n} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \xrightarrow{n \to \infty} 1.$$

Vậy, giới hạn $\lim_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}$ không tồn tại.

Bài tập 10. Đặt $f(x) = \cos\frac{1}{x}$.

Chọn hai dãy số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ với:

- $x_n = \frac{1}{2n\pi} \Rightarrow x_n \to 0$ khi $n \to \infty$ và ta được:

$$f(x_n) = \cos\frac{1}{x_n} = \cos(2n\pi) \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

- $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi} \Rightarrow y_n \to 0$ khi $n \to \infty$ và ta được:

$$f(y_n) = \sin\frac{1}{y_n} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Vậy, giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ không tồn tại.

Bài tập 11. Đặt $f(x) = \sin 2x$.

Chọn hai dãy số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ với:

- $x_n = n\pi \Rightarrow x_n \to \infty$ khi $n \to \infty$ và ta được :

$$f(x_n) = \sin(2x_n) = \sin(2n\pi) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

- $y_n = \frac{\pi}{4} + n\pi \Rightarrow y_n \to \infty$ khi $n \to \infty$ và ta được :

$$f(y_n) = \sin(2y_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Vậy, $\lim\limits_{x\to\infty}\sin 2x$ không tồn tại.

Bài tập 12. Đặt $f(x) = \sin\frac{1}{x-1}$.

Chọn hai dãy số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ với:

- $x_n = \frac{1}{n\pi} + 1 \Rightarrow x_n \to 0$ khi $n \to \infty$ và ta được:

$$f(x_n) = \sin\frac{1}{x_n - 1} = \sin(n\pi) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

- $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} + 1 \Rightarrow y_n \to 0$ khi $n \to \infty$ và ta được:

$$f(y_n) = \sin\frac{1}{y_n - 1} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Vậy, giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\sin\frac{1}{x-1}$ không tồn tại.

Bài tập 13. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$ và $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ không tồn tại.

Bài tập 14. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$ và $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ không tồn tại.

Bài tập 15. Ta có:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x + 3a) = 3a$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^2 + a + 2) = a + 2.$$

Hàm số có giới hạn khi x→ 0 khi và chỉ khi:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \Leftrightarrow a = 1.$$

Vậy, với a = 1 ta có $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 3$.

Bài tập 16. Ta có:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (x + 3a) = 3a - 1$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (x^2 + x + a + 3) = a + 3.$$

Hàm số có giới hạn khi x→ −1 khi và chỉ khi:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) \Leftrightarrow a = 2.$$

Vậy, với a = 2 ta có $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 5$.

Bài tập 17. Với mọi $x \neq 0$ thuộc lân cận của điểm 0 luôn có:

$$\left|x\cos\frac{1}{x}\right| \le |x| \Leftrightarrow -|x| \le x\cos\frac{1}{x} \le |x|,$$

$$\lim_{x\to 0} (-|x|) = \lim_{x\to 0} |x| = 0.$$

Vậy, ta được $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0$.

Bài tập 18. Với mọi $x \neq 0$ thuộc lân cận của điểm 0 luôn có:

$$\left|x^2\sin\frac{1}{x}\right| \le x^2 \Leftrightarrow -x^2 \le x^2\sin\frac{1}{x} \le x^2,$$

$$\lim_{x\to 0} (-x^2) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0.$$

Vậy, ta được $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x} = 0$.

Bài tập 19. Với mọi x ≠ 0 thuộc lân cận của điểm 0 luôn có:

$$\left|\frac{\cos x}{x}\right| \le \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \le \frac{\cos x}{x} \le \frac{1}{|x|}, \text{ với } \forall x \ne 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{|x|} = 0.$$

Vậy, ta được $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x} = 0$ và khi đó:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\cos x}{x+\cos x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\cos x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}} = 1.$$

Bài tập 20.

a. 6. b. 24. c. 9.

Bài tập 21.

a. $\frac{1}{4}$. b. -1. c. $\frac{1}{3}$. d. -4.

Bài tập 22.

a. $-\frac{1}{2}$. b. $\frac{1}{2}$.

Bài tập 23.

a. ∞. b. 1.

CHỦ ĐỀ 2

CÁC DẠNG VÔ ĐỊNH

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Khi tìm giới hạn của một hàm số, chúng ta có thể gặp các trường hợp sau:

1. $\lim \frac{u(x)}{v(x)}$ với $u(x) \to 0$ và $v(x) \to 0$.
2. $\lim \frac{u(x)}{v(x)}$ với $u(x) \to \infty$ và $v(x) \to \infty$.
3. $\lim[u(x) - v(x)]$ với $u(x) \to \infty$ và $v(x) \to \infty$.
4. $\lim[u(x).v(x)]$ với $u(x) \to 0$ và $v(x) \to \infty$.

Ta gọi là các dạng vô định dạng $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0.\infty, \ldots$

II.PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN VÀ BÀI TẬP

Bài toán 1. Tính giới hạn dạng $\frac{0}{0}$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Bản chất của việc khử dạng không xác định $\frac{0}{0}$ là làm xuất hiện nhân tử chung để :

- Hoặc là khử nhân tử chung để đưa về dạng xác định.
- Hoặc đưa giới hạn về dạng giới hạn cơ bản, quen thuộc đã biết rõ kết quả hoặc cách giải.

Ghi chú:

- Nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm x_0 thì $f(x) = (x - x_0).g(x)$.
- Liên hợp của biểu thức:

$\sqrt{a} - b$ là $\sqrt{a} + b$.

$\sqrt{a} - \sqrt{b}$ là $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

$\sqrt[3]{a} - b$ là $\sqrt[3]{a^2} + b\sqrt[3]{a} + b^2$.

$\sqrt[3]{a} + b$ là $\sqrt[3]{a^2} - b\sqrt[3]{a} + b^2$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 1. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^2 + 3x + 1}{-x^2 + 4x + 5}$.

☐ 1. ☐ $-\infty$. ☐ $+\infty$. ☐ $-\dfrac{1}{6}$.

Bài tập 2. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 + x^2 - 2x - 8}{x^2 - 3x + 2}$.

☐ 0. ☐ ∞. ☐ 14. ☐ 11.

Bài tập 3. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x + x^2 + \ldots + x^n - n}{x - 1}$.

☐ n. ☐ $n + 1$. ☐ $n - 1$. ☐ $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Bài tập 4. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n - nx + (n-1)}{(x-1)^2}$.

☐ $n - 1$. ☐ n. ☐ $\dfrac{n(n-1)}{2}$. ☐ $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Bài tập 5. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^n - a^n}{x - a}$.

☐ a^{n-1}. ☐ a^n. ☐ $n.a^{n-1}$. ☐ $n.a^{n+1}$.

Bài tập 6. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{(x^n - a^n) - na^{n-1}(x - a)}{(x-a)^2}$.

☐ $\dfrac{1}{2}n(n+1)a^n$. ☐ $\dfrac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}$. ☐ $\dfrac{1}{2}na^n$. ☐ $\dfrac{1}{2}(n-1)a^{n-1}$.

Bài tập 7. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{3 - \sqrt{2x+9}}$.

☐ $-\dfrac{3}{4}$. ☐ $-\dfrac{3}{2}$. ☐ $\dfrac{1}{2}$. ☐ $\dfrac{5}{4}$.

Bài tập 8. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{2x-1} - \sqrt{x}}{x - 1}$.

☐ $\dfrac{1}{2}$. ☐ $\dfrac{3}{2}$. ☐ $\dfrac{2}{3}$. ☐ $\dfrac{4}{3}$.

Bài tập 9. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - \sqrt{3x-2}}{x - 1}$.

☐ ☐ $\dfrac{3}{2}$. ☐ $-\dfrac{2}{3}$. ☐ $-\dfrac{1}{4}$.

Bài tập 10. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{3x-5}}{\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+6}}$.

☐ 3. ☐ -3. ☐ 1. ☐ 6.

Bài tập 11. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

☐ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ☐ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ☐ $\dfrac{3}{2}$. ☐ $\dfrac{1}{2}$.

Bài tập 12. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x-1} + x^4 - 3x^3 + x^2 + 3}{\sqrt{2x} - 2}$.

☐ 2. ☐ 1. ☐ 0. ☐ -6.

Bài tập 13. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x-2} + 1}$.

☐ 0. ☐ 1. ☐ $\dfrac{1}{3}$. ☐ $\dfrac{2}{3}$.

Bài tập 14. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt[3]{x} + x^2 + x + 1}{x+1}$.

☐ $\dfrac{1}{3}$. ☐ $-\dfrac{1}{3}$. ☐ $\dfrac{2}{3}$. ☐ $-\dfrac{2}{3}$.

Bài tập 15. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{2x-1} - 1}{x-1}$.

☐ $\dfrac{2}{5}$. ☐ $\dfrac{2}{3}$. ☐ $\dfrac{1}{3}$. ☐ $-\dfrac{1}{3}$.

Bài tập 16. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[4]{4x-3} - 1}{x-1}$.

☐ 0. ☐ 1. ☐ 2. ☐ 9.

Bài tập 17. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[4]{2x-1} + \sqrt[5]{x-2}}{x-1}$.

☐ $\dfrac{3}{5}$. ☐ $\dfrac{7}{10}$. ☐ $\dfrac{4}{5}$. ☐ $\dfrac{1}{2}$.

Bài tập 18. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$.

☐ $\dfrac{1}{2}$. ☐ $\dfrac{1}{3}$. ☐ $\dfrac{3}{2}$. ☐ 4.

Bài tập 19. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x^2 + 2004)\sqrt[7]{1 - 2x} - 2004}{x}$.

☐ $-\dfrac{4008}{7}$.   ☐ $\dfrac{4008}{11}$.   ☐ $\dfrac{2004}{5}$.   ☐ $\dfrac{2004}{13}$.

Bài tập 20. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{1+x}.\sqrt[3]{1+\dfrac{x}{2}}.\sqrt[4]{1+\dfrac{x}{3}} - \sqrt[4]{1-x}}{\dfrac{3}{2}\sqrt{4+x} - \sqrt[3]{8-x} - \sqrt[4]{1+x}}$.

☐ $\dfrac{3}{2}$.   ☐ $\dfrac{2}{3}$.   ☐ $\dfrac{19}{4}$.   ☐ $\dfrac{24}{5}$.

Bài toán 2. Tính giới hạn dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta chia cả tử và mẫu cho luỹ thừa bậc cao nhất của x có mặt ở phân thức đó.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 21. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x(x^2+1)(x^3+2)}{x^6}$.

☐ 1.   ☐ 3.   ☐ 0.   ☐ ∞.

Bài tập 22. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x-1)(x^2+2)(2x+3)^3}{x^3(x+1)(2x-1)^2}$.

☐ 1.   ☐ 2.   ☐ 0.   ☐ ∞.

Bài tập 23. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

☐ −1.   ☐ 1.   ☐ $\dfrac{1}{2}$.   ☐ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài tập 24. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x+1}{\sqrt{1-x+4x^2} - x}$.

☐ −1.   ☐ ∞.   ☐ 0.   ☐ $\dfrac{3}{2}$.

Bài tập 25. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Bài tập 26. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+a}}$, với a > 0.

Bài toán 3. Giới hạn dạng $\infty - \infty$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng các phương pháp đã biết để tính giới hạn dạng $\frac{\infty}{\infty}$ chúng ta tính được giới hạn dạng $\infty - \infty$ thông qua phép nhân liên hợp.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 27. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{4x^2 - x} - 2x)$.

☐ 0.　　☐ ∞.　　☐ $-\frac{1}{4}$.　　☐ $\frac{1}{2}$.

Bài tập 28. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x)$.

☐ 0.　　☐ ∞.　　☐ $-\frac{1}{2}$.　　☐ $\frac{1}{2}$.

Bài tập 29. Cho hàm số :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}.$$

Tính các giới hạn $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, từ đó nhận xét về sự tồn tại của giới hạn $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

Bài toán 4. Giới hạn của hàm số lượng giác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta có kết quả:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ và } \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 30. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x + \operatorname{tg} 3x}{x}$.

☐ 2.　　☐ 3.　　☐ 5.　　☐ 1.

Bài tập 31. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} 2x}$.

☐ 0.　　☐ ∞.　　☐ 2.　　☐ $\frac{1}{2}$.

Bài tập 32. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{x\sin x}$.

☐ 0. ☐ 3. ☐ 4. ☐ 5.

Bài tập 33. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$.

☐ ∞. ☐ $\dfrac{1}{2}$. ☐ 0. ☐ 1.

Bài tập 34. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-2}{\sin(x-1)}$.

☐ 1. ☐ 5. ☐ 0. ☐ −2.

Bài tập 35. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin^2\dfrac{x}{2}}$.

☐ π. ☐ 2π. ☐ $\dfrac{\pi}{2}$. ☐ $\dfrac{\pi}{4}$.

Bài tập 36. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2x}{\operatorname{tg}(x-1)}$.

☐ $-\dfrac{1}{2}$. ☐ $-\dfrac{7}{4}$. ☐ $\dfrac{3}{2}$. ☐ 0.

Bài tập 37. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos ax-\cos bx}{x^2}$.

☐ $-\dfrac{1}{2}(a^2-b^2)$. ☐ $-\dfrac{1}{2}(a^2+b^2)$. ☐ $\dfrac{1}{2}(a^2-b^2)$. ☐ $\dfrac{1}{2}(a^2+b^2)$.

Bài tập 38. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax+\operatorname{tg}bx}{(a+b)x}$.

☐ a + b. ☐ ab. ☐ 1. ☐ 0.

Bài tập 39. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x}{x^2}$.

☐ $\dfrac{1}{2}$. ☐ $\dfrac{3}{2}$. ☐ $\dfrac{5}{2}$. ☐ 3.

Bài tập 40. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x}{x\sin x}$.

☐ 2. ☐ 0. ☐ 1. ☐ 3.

Bài tập 41. Tính giới hạn $L=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{98}{83}\left(\dfrac{1-\cos3x\cos5x\cos7x}{\sin^2 7x}\right)$.

☐ $\dfrac{98}{83}$. ☐ $\dfrac{83}{98}$. ☐ 1. ☐ 3.

Bài tập 42. Tính giới hạn $L=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x\sin x-\operatorname{tg}x}{x^2\sin x}$.

☐ −1. ☐ 1. ☐ −3. ☐ 3.

Bài tập 43. Tính giới hạn $L=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos ax-\cos bx\cos cx}{x^2}$.

☐ $-\dfrac{1}{2}(a^2-b^2-c^2)$. ☐ $\dfrac{1}{2}(a^2-b^2+c^2)$.

☐ $\dfrac{1}{2}(a^2-b^2-c^2)$. ☐ $-\dfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$.

Bài tập 44. Tính giới hạn $L=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}\right)$.

☐ 0. ☐ 4. ☐ $\dfrac{1}{2}$. ☐ $\dfrac{1}{4}$.

Bài tập 45. Tính giới hạn $L=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\sin^2 x}-\cos x}{\sin^2 x}$.

☐ 0. ☐ 1. ☐ 2. ☐ $\dfrac{1}{2}$.

Bài tập 46. Tính giới hạn $L=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos^4 x-\sin^4 x-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$.

☐ 0. ☐ 1. ☐ 3. ☐ 4.

Bài tập 47. Tính giới hạn $L=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\cos2x\ldots\cos nx}{x^2}$.

Bài toán 5. Giới hạn dạng 1^∞, $0.\infty$, ∞^0.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Đối với dạng 1^∞ cần nhớ các giới hạn cơ bản sau :

a. $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

b. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

Việc áp dụng chúng để tìm giới hạn của hàm số trong nhiều trường hợp cần thực hiện các phép biến đổi phù hợp.

2. Đối với dạng $0.\infty$ và ∞^0, ta chọn một trong hai cách sau :

Cách 1 : Sử dụng phương pháp biến đổi để tận dụng các dạng giới hạn cơ bản.

Cách 2 : Sử dụng nguyên lí kẹp giữa, với các bước :

Bước 1: Chọn hai hàm số g(x), h(x) thoả mãn :

$$g(x) \le f(x) \le h(x).$$

Bước 2: Khẳng định

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L$$

$$\left(\text{hoặc } \lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} h(x) = L\right).$$

Bước 3: Vậy :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \left(\text{hoặc } \lim_{x\to\infty} f(x) = L\right).$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 48. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 0} (1+\sin 3x)^{\frac{1}{x}}$.

☐ e. ☐ e^2. ☐ e^3. ☐ $\frac{1}{e}$.

Bài tập 49. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{2x+1}$.

☐ e. ☐ e^2. ☐ e^3. ☐ $\frac{1}{e^2}$.

Bài tập 50. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \left[\text{tg}2x.\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]$.

☐ 0. ☐ 1. ☐ 2. ☐ $\frac{\pi}{4}$.

Bài tập 51. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 1} \left[(x-1)^2.\sin\frac{1}{x-1}\right]$.

☐ 0. ☐ 1. ☐ 2. ☐ $-\frac{1}{2}$.

Bài tập 52. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 0} \left(x.\cos\frac{1}{x}\right)$.

☐ 0. ☐ 1. ☐ 3. ☐ $\frac{1}{2}$.

III. HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Ta có:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+3x+1}{-x^2+4x+5}=\lim_{x\to -1}\frac{(2x+1)(x+1)}{(5-x)(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{2x+1}{5-x}=-\frac{1}{6}.$$

Bài tập 2. Ta có:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+x^2-2x-8}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+3x+4)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x+4}{x-1}=14$$

Bài tập 3. $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Bài tập 4. $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Bài tập 5. Ta có:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\to a}(x^{n-1}+x^{n-2}.a+\ldots+a^{n-1})=n.a^{n-1}.$$

Bài tập 6. $\dfrac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}$.

Bài tập 7. Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{3-\sqrt{2x+9}}=\lim_{x\to 0}\frac{x(3+\sqrt{2x+9})}{-2x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{3+\sqrt{2x+9}}{-2(\sqrt{x+1}+1)}=-\frac{3}{2}.$$

Bài tập 8. Ta có:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2}.$$

Bài tập 9. Ta có:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-\sqrt{3x-2}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^6-3x+2}{(x-1)(x^3+\sqrt{3x-2})}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x-2)}{(x-1)(x^3+\sqrt{3x-2})}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^5+x^4+x^3+x^2+x-2}{x^3+\sqrt{3x-2}}=\frac{3}{2}.$$

Bài tập 10. Ta có:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-5}}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+6}}=\lim_{x\to 3}\frac{(6-2x)(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+6})}{(x-3)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-5})}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-2(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+6})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-5}}=-3.$$

Bài tập 11. Ta có:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^2-1}}+\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x^2-1}}+\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Bài tập 12. 1 – *Làm tương tự như bài 14.*

Bài tập 13. Ta có:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x-2}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{[\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{x-2}+1](x-1)}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{x-2}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=1.$$

Bài tập 14. Ta có:

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x}+x^2+x+1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}+\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)(x+1)}+\lim_{x\to -1}x$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}-1=-\frac{2}{3}.$$

Bài tập 15. $\frac{2}{3}$.

Bài tập 16. Ta đặt $t=\sqrt[4]{4x-3}$ suy ra:

$x=\frac{1}{4}(t^4+3)$ và khi $x\to 1$ thì $t\to 1$.

Khi đó:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{4x-3}-1}{x-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{\frac{1}{4}(t^4+3)-1}=\lim_{t\to 1}\frac{4(t-1)}{t^4-1}$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{4}{t^3+t^2+t+1}=1.$$

Bài tập 17. Ta có:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{2x-1}+\sqrt[5]{x-2}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{2x-1}-1+\sqrt[5]{x-2}+1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{2x-1}-1}{x-1}+\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[5]{x-2}+1}{x-1}.$$

Đặt :

$$\begin{cases} u = \sqrt[4]{2x-1} \\ v = \sqrt[5]{x-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = \dfrac{u^4-1}{2} \\ x - 1 = v^5 - 1 \end{cases}.$$

Khi đó :

$$\frac{\sqrt[4]{2x-1}-1}{x-1} = \frac{2(u-1)}{u^4-1} = \frac{2}{(u+1)(u^2+1)} \text{ và } x \to 1 \Leftrightarrow u \to 1.$$

$$\frac{\sqrt[5]{x-2}+1}{x-1} = \frac{v+1}{v^5+1} = \frac{1}{v^4-v^3+v^2-v+1} \text{ và } x \to 1 \Leftrightarrow v \to -1.$$

Vậy, ta được:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{2x-1}+\sqrt[5]{x-2}}{x-1} = \lim_{u\to 1}\frac{2}{(u+1)(u^2+1)} + \lim_{v\to -1}\frac{1}{v^4-v^3+v^2-v+1}$$

$$= \frac{7}{10}.$$

Bài tập 18. Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-(x+1)+(x+1)-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-(x+1)}{x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{(x+1)-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}.$$

Ta đi xác định từng giới hạn :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-(x+1)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{[\sqrt{1+2x}+(x+1)]x^2} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^3-1-3x}{[(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{1+3x}+\sqrt[3]{(1+3x)^2}\,]x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x+3}{(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{1+3x}+\sqrt[3]{(1+3x)^2}}$$

$$= 1.$$

Vậy, ta được:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

Bài tập 19. Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+2004)\sqrt[7]{1-2x}-2004}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(x^2+2004)\sqrt[7]{1-2x}-x^2-2004+x^2}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[(x^2+2004)\frac{\sqrt[7]{1-2x}-1}{x}+x\right] = -\frac{4008}{7}.$$

Nhận xét : Trong thí dụ trên chúng ta đã thêm bớt x^2 để làm xuất hiện đa thức $P(x) = x^2 + 2004$ ở tử thức, từ đó làm xuất hiện dạng

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=\frac{a}{n},$$

đây là điểm mấu chốt của lời giải.

Bài tập 20. Gọi tử thức là T, ta có:

$$T = \sqrt{1+x}\,\sqrt[3]{1+\frac{x}{2}}.\sqrt[4]{1+\frac{x}{3}} - \sqrt[3]{1+\frac{x}{2}}.\sqrt[4]{1+\frac{x}{3}} +$$

$$+\sqrt[3]{1+\frac{x}{2}}.\sqrt[4]{1+\frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1+\frac{x}{3}} + \sqrt[4]{1+\frac{x}{3}} - 1 + 1 - \sqrt[4]{1-x}$$

$$= \sqrt[3]{1+\frac{x}{2}}.\sqrt[4]{1+\frac{x}{3}}\,(\sqrt{1+x}-1) + \sqrt[4]{1+\frac{x}{3}}\left(\sqrt[3]{1+\frac{x}{2}}-1\right) +$$

$$+\left(\sqrt[4]{1+\frac{x}{3}}-1\right) - (\sqrt[4]{1-x}-1).$$

Gọi mẫu thức là M, ta có :

$$M = \frac{3}{2}.2.\sqrt{1+\frac{x}{4}} - 2\sqrt[3]{1-\frac{x}{8}} - \sqrt[4]{1+x}$$

$$= 3\left(\sqrt{1+\frac{x}{4}}-1\right) - 2\left(\sqrt[3]{1-\frac{x}{8}}-1\right) - (\sqrt[4]{1+x}-1).$$

Ta có:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1+x}.\sqrt[3]{1+\frac{x}{2}}.\sqrt[4]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1-x}}{\frac{3}{2}\sqrt{4+x}-\sqrt[3]{8-x}-\sqrt[4]{1+x}} = \lim_{x\to 1}\frac{T}{M} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{T}{x}}{\frac{M}{x}} = \frac{1}{\frac{5}{24}} = \frac{24}{5}.$$

Bài tập 21. 1.

Bài tập 22. 2.

Bài tập 23. 1.

Bài tập 24. Chia cả tử và mẫu cho x (lưu ý x<0), ta được:

$$L = \lim_{x\to-\infty}\frac{3+\frac{1}{x}}{-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+4}-1} = -1.$$

Bài tập 25. Ta đi tính các giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, từ đó nhận xét về sự tồn tại của giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Ta có:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = 1.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = -1.$$

Vậy, ta thấy $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, suy ra $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ không tồn tại.

Bài tập 26. Ta đi tính các giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, từ đó nhận xét về sự tồn tại của giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Ta có:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+a}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}} = 1.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+a}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{2}{x}}{-\sqrt{1+\frac{a}{x}}} = -1.$$

Vậy, ta thấy $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, suy ra $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ không tồn tại.

Bài tập 27. Ta có:

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{4x^2-x} - 2x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{4x^2-x} - 2x)(\sqrt{4x^2-x} + 2x)}{\sqrt{4x^2-x} + 2x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{\sqrt{4x^2-x} + 2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{4-\frac{1}{x}} + 2} = -\frac{1}{4}.$$

Bài tập 28. Ta có:

$$\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2-x+1} + x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x+1-x^2}{\sqrt{x^2-x+1} - x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-x}{\sqrt{x^2-x+1} - x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x} - 1}{-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - 1} = -\frac{1}{2}.$$

Bài tập 29. Ta có:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1})$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x^2-x+1}} = -1.$$

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1})$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x^2-x+1}} = 1.$$

Vậy, ta thấy $\lim_{x\to-\infty} f(x) \neq \lim_{x\to+\infty} f(x)$, suy ra $\lim_{x\to\infty} f(x)$ không tồn tại.

Bài tập 30. Ta có:

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin 2x + \mathrm{tg}3x}{x} = \lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 2x}{x} + \frac{\mathrm{tg}3x}{x}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{2\sin 2x}{2x} + \frac{3\mathrm{tg}3x}{3x}\right)$$

$$= 5.$$

Bài tập 31. Ta có:

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{\mathrm{tg}2x} = \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x}\,\frac{2x}{\mathrm{tg}2x}.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Bài tập 32. Ta có:

$$\lim_{x\to0} \frac{1-\cos^2 2x}{x\sin x} = \lim_{x\to0} \frac{\sin^2 2x}{x\sin x} = \lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 2x}{x}.\frac{\sin 2x}{\sin x}\right)$$

$$= \lim_{x\to0}\left(\frac{2\sin 2x}{2x}.2\cos x\right) = 4.$$

Bài tập 33. Ta có:

$$\mathrm{tg}x - \sin x = \frac{\sin x}{\cos x} - \sin x = \frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x} = \frac{2\sin x.\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x}.$$

Do đó :

$$\lim_{x\to0} \frac{\mathrm{tg}x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to0} \frac{2\sin x.\sin^2\frac{x}{2}}{x^3\cos x} = \lim_{x\to0} \frac{2}{\cos x}.\frac{\sin x}{x}.\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}.$$

Bài tập 34. Ta có:

$$\lim_{x\to1} \frac{x^3+x^2-2}{\sin(x-1)} = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x^2+2x+2)}{\sin(x-1)} = \lim_{x\to1} \frac{x^2+2x+2}{\frac{\sin(x-1)}{x-1}} = 5.$$

Bài tập 35. Ta có:

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-\cos x)\right]}{\sin^2\frac{x}{2}}=\pi\frac{\sin\left(\pi\sin^2\frac{x}{2}\right)}{\pi\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Do đó :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\pi\frac{\sin\left(\pi\sin^2\frac{x}{2}\right)}{\pi\sin^2\frac{x}{2}}=\pi.$$

Bài tập 36. Ta có:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2x}{\text{tg}(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{-4x^2+x+3}{(\sqrt{x+3}+2x)\text{tg}(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-4x-3}{\sqrt{x+3}+2x}\cdot\frac{x-1}{\text{tg}(x-1)}=-\frac{7}{4}.$$

Bài tập 37. Ta có:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{(a+b)x}{2}.\sin\frac{(a-b)x}{2}}{\frac{(a+b)x}{2}.\frac{(a-b)x}{2}}.\frac{(a+b)}{2}.\frac{(a-b)}{2}=-\frac{1}{2}(a^2-b^2).$$

Bài tập 38. Ta có:

$$L=\frac{1}{a+b}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin ax}{x}+\frac{\text{tg}bx}{x}\right)=\frac{1}{a+b}\lim_{x\to 0}\left(\frac{a\sin ax}{ax}+\frac{b\text{tg}bx}{bx}\right)$$

$$=\frac{1}{a+b}.(a+b)=1.$$

Bài tập 39. Ta có:

$$\frac{1-\cos x\cos 2x}{x^2}=\frac{1-\frac{1}{2}(\cos 3x+\cos x)}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2-\cos 3x-\cos x}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos 3x}{x^2}+\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2\sin^2\frac{3x}{2}}{x^2}+\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2\sin^2\frac{3x}{2}}{\frac{4}{9}.\frac{9x^2}{4}}+\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4.\frac{x^2}{4}}\right).$$

Do đó :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{3x}{2}}{\frac{4}{9}\cdot\frac{9x^2}{4}}+\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4.\frac{x^2}{4}}\right)=\frac{5}{2}.$$

Bài tập 40. Ta có:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x+\mathrm{tg}^2x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\sin x}{x}+\frac{\mathrm{tg}x}{x}.\frac{\mathrm{tg}x}{\sin x}\right)=2+1=3.$$

Bài tập 41. Ta có:

$$1-\cos 3x\cos 5x\cos 7x=1-\frac{1}{2}(\cos 8x+\cos 2x)\cos 7x$$

$$=1-\frac{1}{2}(\cos 8x\cos 7x+\cos 2x\cos 7x)$$

$$=1-\frac{1}{4}(\cos 15x+\cos x+\cos 9x+\cos 5x)$$

$$=\frac{1}{4}(4-\cos 15x-\cos x-\cos 9x-\cos 5x)$$

$$=\frac{1}{4}[(1-\cos 15x)+(1-\cos x)+(1-\cos 9x)+(1-\cos 5x)]$$

$$=\frac{1}{4}\left(2\sin^2\frac{15x}{2}+2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin^2\frac{9x}{2}+2\sin^2\frac{5x}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{15x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{9x}{2}+\sin^2\frac{5x}{2}\right).$$

Do đó :

$$\lim_{x\to 0}\frac{98}{83}\left(\frac{1-\cos 3x\cos 5x\cos 7x}{\sin^2 7x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{98}{83}.\frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{15x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{9x}{2}+\sin^2\frac{5x}{2}\right).\frac{1}{\sin^2 7x}$$

$$=\frac{98}{83}.\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin^2\frac{15x}{2}}{\left(\frac{15x}{2}\right)^2}.\left(\frac{15}{2}\right)^2+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}.\left(\frac{1}{2}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{\sin^2\frac{9x}{2}}{\left(\frac{9x}{2}\right)^2}.\left(\frac{9}{2}\right)^2+\frac{\sin^2\frac{5x}{2}}{\left(\frac{5x}{2}\right)^2}.\left(\frac{5}{2}\right)^2\right].\frac{(7x)^2}{\sin^2 7x}.\frac{1}{(7)^2}$$

$$=\frac{98}{83}.\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{15}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2\right].\frac{1}{(7)^2}=1.$$

Bài tập 42. $L = -1$.

Bài tập 43. $L = -\frac{1}{2}(a^2 - b^2 - c^2)$.

Bài tập 44. $L = \frac{1}{2}$.

Bài tập 45. $L = 1$.

Bài tập 46. $L = -4$.

Bài tập 47. *Bạn đọc tự làm.*

Bài tập 48. Ta có:

$$(1+\sin 3x)^{\frac{1}{x}} = (1+\sin 3x)^{\frac{1}{\sin 3x}\cdot\frac{\sin 3x}{x}} = (1+\sin 3x)^{\frac{1}{\sin 3x}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3}.$$

Do đó :

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin 3x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}(1+\sin 3x)^{\frac{1}{\sin 3x}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3} = e^3.$$

Bài tập 49. Ta có:

$$\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{2x+1} = \left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{2x+1},$$

đặt $\frac{1}{t} = \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow x = t - 1$.

Nhận xét khi $x \to \infty$ thì $t \to \infty$.

Vậy, ta được:

$$\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{2x+1} = \left(1+\frac{1}{t}\right)^{2(t-1)+1} = \left(1+\frac{1}{t}\right)^{t\cdot\frac{2t-1}{t}}.$$

Do đó :

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{2x+1} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t\cdot\frac{2t-1}{t}} = e^2.$$

Bài tập 50. $L = 0$.

Bài tập 51. $L = 0$.

Bài tập 52. $L = 0$.

CHƯƠNG III

HÀM SỐ LIÊN TỤC

CHỦ ĐỀ 1

HÀM SỐ LIÊN TỤC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

***Định nghĩa 1**: Cho hàm số* $y = f(x)$ *xác định trên khoảng* (a, b). *Hàm số* $y = f(x)$ *được gọi là liên tục tại điểm* $x_0 \in (a, b)$ *nếu:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Nếu tại điểm x_0 hàm số $y = f(x)$ không liên tục, thì được gọi là *gián đoạn* tại x_0 và điểm x_0 được gọi là *điểm gián đoạn* của hàm số $y = f(x)$.

Chú ý:

1. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu ba điều kiện sau được đồng thời thoả mãn:

   (i) $f(x)$ xác định tại x_0.

   (ii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ tồn tại.

   (iii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

   Hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại điểm x_0 nếu một trong ba điều kiện trên không được thoả mãn.

2. Nếu sử dụng giới hạn một phía thì :

   1. Nếu $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ tồn tại và $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ thì hàm số $y = f(x)$ được gọi là *liên tục trái tại điểm* x_0.
   2. Nếu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ tồn tại và $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ thì hàm số $y = f(x)$ được gọi là *liên tục phải tại điểm* x_0.
   3. Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Đặc trưng khác của tính liên tục tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a ; b)$. Giả sử x_0 và $x (x \neq x_0)$ là hai phần tử của $(a ; b)$.

- Hiệu $x - x_0$, kí hiệu là Δx (đọc là đen - ta x), được gọi là *số gia của đối số tại điểm* x_0. Ta có :

  $$\Delta x = x - x_0 \Leftrightarrow x = x_0 + \Delta x.$$

- Hiệu $y - y_0 = f(x) - f(x_0)$, kí hiệu là Δy, được gọi là *số gia tương ứng của hàm số tại điểm* x_0. Ta có :

  $$\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Đặc trưng : Dùng khái niệm số gia, ta có thể đặc trưng tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 như sau :

Định lí 1. *Một hàm số $y = f(x)$, xác định trên $(a; b)$, là liên tục tại $x_0 \in (a; b)$ nếu và chỉ nếu* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

2. HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG

Định nghĩa 2: Ta có :

1. *Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trong khoảng $(a; b)$ nếu nó liên tục tại mỗi điểm của khoảng đó.*
2. *Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu nó*
    - *Liên tục trong khoảng $(a; b)$,*
    - $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ *(liên tục bên phải tại điểm a),*
    - $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ *(liên tục bên trái tại điểm b).*

***Chú ý*:**

1. Đồ thị của một hàm số liên tục trên một khoảng là một "đường liền" trên khoảng đó.
2. Khi ta nói hàm số $y = f(x)$ liên tục mà không chỉ ra trên khoảng nào thì có nghĩa là hàm số liên tục trên tập xác định của nó.

3. CÁC ĐỊNH LÍ VỀ HÀM SỐ LIÊN TỤC

Định lí 2. *Tổng, hiệu, tích, thương (với mẫu khác 0) của các hàm số liên tục tại một điểm là hàm số liên tục tại điểm đó.*

Định lí 3. *Các hàm số đa thức, hàm số hữu tỉ, hàm số lượng giác là liên tục trên tập xác định của chúng.*

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN VÀ BÀI TẬP

Bài toán 1: Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm – Dạng I.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \text{ khi } x \neq x_0 \\ f_2(x) \text{ khi } x = x_0 \end{cases}.$$

Để xét tính liên tục hoặc xác định giá trị của tham số để hàm số liên tục tại điểm x_0, chúng ta thực hiện theo các bước sau :

Bước 1: Tính giới hạn:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) = L.$$

Bước 2: Tính $f(x_0) = f_2(x_0)$.

Bước 3: Đánh giá hoặc giải phương trình $L = f_2(x_0)$, từ đó đưa ra kết luận.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Xét tính liên tục của các hàm số sau tại điểm $x_0 = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x + a \ \text{ khi } x = 1 & \end{cases}.$$

Bài tập 2: Xét tính liên tục của các hàm số sau tại các điểm $x = 0$ và $x = 3$:

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{khi } x = 0 \text{ với } 0 < a < +\infty \\ \dfrac{x^2 - x - 6}{x(x - 3)} & \text{khi } x^2 - 3x \neq 0 \\ b & \text{khi } x = 3 \end{cases}.$$

Bài tập 3: Tổng hai hàm $f(x) + g(x)$ có nhất thiết phải gián đoạn tại điểm x_0 cho trước hay không, nếu:

a. Hàm $f(x)$ liên tục còn hàm $g(x)$ gián đoạn tại $x = x_0$.

b. Cả hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ đều gián đoạn tại $x = x_0$.

Nêu các ví dụ tương ứng.

Bài toán 2: Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm – Dạng II.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho hàm số :

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \text{ khi } x < x_0 \\ f_2(x) \text{ khi } x \geq x_0 \end{cases}.$$

Để xét tính liên tục hoặc xác định giá trị của tham số để hàm số liên tục tại điểm x_0, chúng ta thực hiện theo các bước sau :

Bước 1: Tính $f(x_0) = f_2(x_0)$.

Bước 2: (*Liên tục trái*) Tính :

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f_1(x) = L_1.$$

Đánh giá hoặc giải phương trình $L_1 = f_2(x_0)$, từ đó đưa ra lời kết luận về liên tục trái.

Bước 3: (*Liên tục phải*) Tính :

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f_2(x) = L_2.$$

Đánh giá hoặc giải phương trình $L_2 = f_2(x_0)$, từ đó đưa ra lời kết luận về liên tục phải.

Bước 4: Đánh giá hoặc giải phương trình $L_1 = L_2$, từ đó đưa ra lời kết luận.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 4: Xét tính liên tục của các hàm số sau tại điểm $x_0 = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2a & \text{khi } x < 0 \\ x^2 + x + 1 & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}.$$

Bài tập 5: Xét tính liên tục của các hàm số sau tại điểm $x_0 = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{khi } x \leq 1 \\ \sqrt{x^2 - 1} & \text{khi } x > 1 \end{cases}.$$

Bài tập 6: Xét tính liên tục của các hàm số sau tại điểm $x = 1$ và $x = -1$:

$$f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2} & \text{khi } |x| \leq 1 \\ |x - 1| & \text{khi } |x| > 1 \end{cases}.$$

Bài toán 3: Xét tính liên tục của hàm số trên một khoảng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để xét tính liên tục hoặc xác định giá trị của tham số để hàm số liên tục trên khoảng I, chúng ta thực hiện theo các bước sau :

Bước 1: Xét tính liên tục của hàm số trên các khoảng đơn.

Bước 2: Xét tính liên tục của hàm số tại các điểm giao.

Bước 3: Kết luận.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 7: Xác định a, b để hàm số sau liên tục trên toàn trục số:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{khi } |x| \leq \pi \\ ax + b & \text{khi } |x| > \pi \end{cases}.$$

☐ $a = b = 0$. ☐ $a = b = 1$. ☐ $a = 0; b = 1$. ☐ $a = 1; b = 0$.

Bài tập 8: Xét tính liên tục của hàm hợp $y = f(u)$ trong đó $u = g(x)$ nếu

$$f(u) = \begin{cases} u & \text{khi } u > 0 \\ u - 1 & \text{khi } u \leq 0 \end{cases} \text{ và } g(x) = \begin{cases} x & \text{khi } |x| > 0 \\ x - 1 & \text{khi } |x| \leq 0 \end{cases}.$$

Bài tập 9: Có thể khẳng định rằng bình phương của một hàm gián đoạn cũng là một hàm gián đoạn hay không ? Tìm ví dụ minh hoạ.

Bài tập 10: Chứng minh rằng nếu f(x) là hàm liên tục thì hàm số $F(x) = |f(x)|$ cũng là một hàm liên tục.

Bài tập 11: Cho f là hàm số liên tục trên $[0, +\infty)$ mà $f(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ $\forall t > 0$.

Chứng tỏ rằng hàm số g cho bởi công thức sau:

$$g(x) = \begin{cases} f(\text{tg}x) \text{ khi } 0 \le x < \dfrac{\pi}{2} \\ f(0) \quad \text{khi } x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

cũng liên tục trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

III. HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbf{R}$.

Ta có:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x^2 - x + 2) = 2,$$

$f(1) = a + 3$.

Vậy:

- Nếu ta có:

$$2 = a + 3 \Leftrightarrow a = -1 \Leftrightarrow f(1) = 2 = \lim_{x \to 1} f(x),$$

thì hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 1$ (do đó liên tục trên toàn trục số).

- Nếu ta có:

$$2 \ne a + 3 \Leftrightarrow a \ne -1 \Leftrightarrow f(1) \ne 2 = \lim_{x \to 1} f(x),$$

thì hàm số gián đoạn tại điểm $x_0 = 1$.

Bài tập 2. Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbf{R}$.

Ta có:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - x - 6}{x(x - 3)} = \infty,$$

do vậy với $0 < a < +\infty$ hàm số luôn gián đoạn tại $x = 0$.

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x(x - 3)} = \lim_{x \to 3} \frac{x + 2}{x} = \frac{5}{3},$$

$f(3) = b$.

Vậy:

- Nếu ta có:

$\frac{5}{3} = b \Leftrightarrow f(3) = 2 = \lim_{x \to 3} f(x)$, thì hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 3$.

- Nếu ta có:

$\frac{5}{3} \ne b \Leftrightarrow f(3) \ne 2 = \lim_{x \to 3} f(x)$, thì hàm số gián đoạn tại điểm $x_0 = 3$.

Bài tập 3. *Bạn đọc tự làm.*

Bài tập 4. Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbf{R}$.

Ta có:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^2 + x + 1) = 1 \text{ và } \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x + 2a) = 2a.$$

$f(0) = 1.$

Vậy :

- Nếu $2a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$ thì $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 1 \Leftrightarrow$ hàm số liên tục tại $x_0 = 0$.
- Nếu $a \neq \frac{1}{2}$ thì $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \Leftrightarrow$ hàm số gián đoạn tại $x_0 = 0$.

Bài tập 5. *Bạn đọc tự làm.*

Bài tập 6. *Bạn đọc tự làm.*

Bài tập 7. $a = b = 0$.

Bài tập 8. *Bạn đọc tự làm.*

Bài tập 9. *Bạn đọc tự làm.*

Bài tập 10. *Bạn đọc tự làm.*

Bài tập 11. Hàm số g liên tục trên khoảng $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

- Xét tính liên tục phải của hàm số g tại điểm $x = 0$.

  Giả sử $(x_n) \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ mà $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, ta xét :

  $$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(\mathrm{tg}x_n) = f(\mathrm{tg}0) = g(0).$$

  Tức là hàm số liên tục phải tại $x = 0$.

- Xét tính liên tục trái của hàm số g tại điểm $x = \frac{\pi}{2}$.

  Giả sử $(x_n) \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ mà $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{\pi}{2}$, ta xét :

  $$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(\mathrm{tg}x_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{\mathrm{tg}x_n}\right) = \lim_{n\to\infty} f(\mathrm{cotg}x_n)$$

  $$= f\left(\mathrm{cotg}\frac{\pi}{2}\right) = f(0) = g\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Tức là hàm số liên tục trái tại $x = \frac{\pi}{2}$.

Vậy hàm số liên tục trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

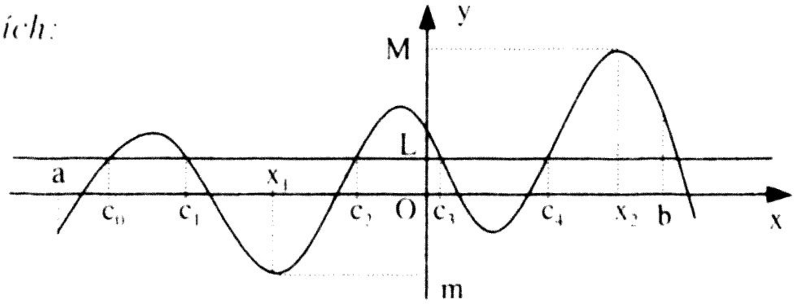
CHỦ ĐỀ 2
TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ LIÊN TỤC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định lí 4. *Nếu hàm số* $y = f(x)$ *liên tục và dương khi* $x = a$ *thì nó dương trên một khoảng nào đó chứa điểm* a.

Định lí 5. *Nếu hàm số* $y = f(x)$ *liên tục trên đoạn* $[a, b]$, *thì nó đạt được giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất và mọi giá trị trung gian giữa giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên đoạn đó.*

Giải thích:



Tồn tại ít nhất một điểm $x_1 \in [a, b]$ và một điểm $x_2 \in [a, b]$ sao cho với mọi $x \in [a, b]$ ta có : $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$. Khi đó :

- Đặt $m = f(x_1)$ thì m là giá trị nhỏ nhất của f(x) trên đoạn [a, b].
- Đặt $M = f(x_2)$ thì M là giá trị lớn nhất của f(x) trên đoạn [a, b].

Với mọi giá trị trung gian L giữa m và M, tức là sao cho $m \leq L \leq M$, tồn tại ít nhất một điểm $c \in [a, b]$ sao cho $f(c) = L$.

Hệ quả.

- *Nếu hàm số* $y = f(x)$ *liên tục trên đoạn* $[a, b]$ *và* $f(a)f(b) < 0$ *thì tồn tại ít nhất một điểm* $x_0 \in (a, b)$ *sao cho* $f(x_0) = 0$.
- Nói cách khác: *Nếu hàm số* $y = f(x)$ *liên tục trên đoạn* $[a, b]$ *và* $f(a)f(b) < 0$ *thì phương trình* $f(x) = 0$ *có ít nhất một nghiệm trong khoảng* (a, b).

II.PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN VÀ BÀI TẬP

Bài toán 1: Sử dụng tính liên tục của hàm số chứng minh phương trình có nghiệm.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho phương trình :

$$f(x) = 0.$$

Để chứng minh phương trình có k nghiệm trong [a, b], ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chọn các số $a < T_1 < T_2 < ... < T_{k-1} < b$ chia đoạn [a, b] thành k khoảng thoả mãn :

$$\begin{cases} f(a).f(T_1) < 0 \\ \dots \\ f(T_{k-1}).f(b) < 0 \end{cases}$$

Bước 2: Kết luận về số nghiệm của phương trình trên đoạn [a, b].

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1. Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm thuộc (−1, 1):

$$x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$$

Bài tập 2. Chứng minh rằng phương trình sau có năm nghiệm thuộc (−2, 3):

$$x^5 - 5x^3 + 4x - 1 = 0$$

Bài tập 3. Chứng minh rằng với mọi m phương trình sau luôn có hai nghiệm phân biệt:

$$x^2 - m|x| - 1 = 0.$$

Bài tập 4. Chứng minh rằng với mọi m > 2 phương trình sau luôn có bốn nghiệm phân biệt:

$$|x|^3 - 2mx^2 + 2 = 0.$$

Bài tập 5. Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm, biết rằng $a \le b \le c \le d$, p và q là hai số thực bất kì:

$$p(\sqrt[3]{1-x} - a)(\sqrt[3]{1-x} - c) + q(\sqrt[3]{1-x} - b)(\sqrt[3]{1-x} - d) = 0$$

Bài tập 6. Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm với a, b, c là ba số tuỳ ý:

$$a(x - b)(x - c) + b(x - c)(x - a) + c(x - a)(x - b) = 0$$

Bài tập 7. Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm với a, b, c là ba số tuỳ ý:

$$a(\sqrt[3]{x} - b)(\sqrt[3]{x} - c) + b(\sqrt[3]{x} - c)(\sqrt[3]{x} - a) + c(\sqrt[3]{x} - a)(\sqrt[3]{x} - b) = 0.$$

Bài tập 8. Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm:

$$\sin x - x + 1 = 0$$

Bài toán 2: Sử dụng tính liên tục của hàm số xét dấu hàm số.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng kết quả:

"*Nếu hàm số* y = f(x) *liên tục và không triệt tiêu trên đoạn* [a, b] *thì có dấu nhất định trên* (a, b)".

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 9. Xét dấu các hàm số sau:

a. $f(x) = 2\sqrt{x+1} - x - 1$. c. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x + 1$.

b. $f(x) = x - \sqrt{2x+3}$. d. $f(x) = x^2 + \sqrt{x+1} - 1$.

Bài tập 10. Xét dấu hàm số:

$$f(x) = \sqrt{3x+4} - \sqrt{2x+1} - \sqrt{x+3}.$$

Bài tập 11. Xét dấu các hàm số sau:

a. $f(x) = 6\text{tg}x - \text{tg}2x$. c. $f(x) = \sin 2x + 2\text{tg}x - 3$.

b. $f(x) = \sin 4x - \text{tg}x$. d. $f(x) = 1 + 3\sin 2x - 2\text{tg}x$.

Bài tập 12. Xét dấu các hàm số sau:

a. $f(x) = (1 - \text{tg}x)(1 + \sin 2x) - 1 - \text{tg}x$.

b. $f(x) = 3\sin x + \cos x - 4\text{cotg}\frac{x}{2} + 1$.

III. HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Xét hàm số $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 1$ liên tục trên **R**.

Ta có :

$$f(-1).f(1) = -3.1 = -3 < 0,$$

Vậy phương trình có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(-1, 1)$.

Bài tập 2. Xét hàm số $f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x - 1$ liên tục trên **R**.

Ta có :

$$f(-2).f(-\frac{3}{2}) = -1.\frac{73}{32} < 0,$$

$$f(-\frac{3}{2}).f(-1) = \frac{73}{32}.(-1) < 0,$$

$$f(-1).f(\frac{1}{2}) = -1.\frac{13}{32} < 0,$$

$$f(\frac{1}{2}).f(1) = \frac{13}{32}.(-1) < 0,$$

$$f(1).f(3) = -1.119 < 0,$$

Vậy, phương trình có năm nghiệm trong khoảng $(-2, 3)$.

Bài tập 3. Đặt $t = |x|$, $t \geq 0$, ta được:

$$t^2 - mt - 1 = 0.$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 - mt - 1$ liên tục trên **R**.

Ta có $ac = -1 < 0$ nên phương trình có hai nghiệm trái dấu $t_1 < 0 < t_2$

$\Rightarrow x = \pm t_2$.

Vậy, với mọi m phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Bài tập 4. Đặt $t = |x|$, $t \geq 0$, ta được:

$t^3 - 2mt^2 + 2 = 0$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 2mt^2 + 2$ liên tục trên **R**.

Ta có:

$f(0) = 2 > 0$

$f(2) = 10 - 8m < 0$ với $m > 2$

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty \Rightarrow \exists c > 2$ sao cho $f(c) > 0$,

suy ra :

$f(0).f(2) < 0$, tức phương trình có một nghiệm $t_1 \in (0, 2) \Rightarrow x = \pm t_1$.

$f(2).f(c) < 0$, tức phương trình có một nghiệm $t_2 \in (2, c) \Rightarrow x = \pm t_2$.

Vậy, với mọi $m > 2$ phương trình luôn có bốn nghiệm phân

Bài tập 5. Xét hàm số $f(x) = p(\sqrt[3]{1-x} - a)(\sqrt[3]{1-x} - c) + q(\sqrt[3]{1-x} - b)(\sqrt[3]{1-x} - d)$ liên tục trên **R**.

Nếu $p = q = 0$, phương trình có nghiệm tuỳ ý.

Nếu $p \neq 0$ hoặc $q \neq 0$, không mất tính tổng quát ta giả sử $p \neq 0$. Khi đó:

$f(1 - a^3) = q(a - b)(a - d)$ và $f(1 - c^3) = q(c - b)(c - d)$,

suy ra :

$f(1 - a^3).f(1 - c^3) = q^2(a - b)(a - d)(c - b)(c - d) \leq 0$.

Vậy, phương trình luôn có nghiệm.

Bài tập 6. Xét các trường hợp:

1. Với $a = b = c = 0$.
2. Một trong các số a, b, c bằng 0.
3. Hai trong các số a, b, c bằng 0.
4. Với $abc \neq 0$.

Bài tập 7. Làm tương tự bài 6 với $t = \sqrt[3]{x}$.

Bài tập 8. Xét hàm số $f(x) = \sin x - x + 1$ liên tục trên **R**.

Ta có :

$f(0).f(\pi) = 1.(1 - \pi) < 0$,

Vậy, phương trình luôn có nghiệm trong khoảng $(0, \pi)$.

Bài tập 9.

a. Hàm số f(x) liên tục trên $[-1, +\infty)$.

Giải phương trình f(x) = 0, ta có:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} = x + 1 \overset{t=\sqrt{x+1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+1 = 0 \\ x+1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right. .$$

Như vậy, trên các khoảng $(-1, 3)$ và $(3, +\infty)$ hàm số f(x) không triệt tiêu, do đó:

- Vì $f(0) = 1 > 0$ nên $f(x) > 0$ với $\forall x \in (-1, 3)$.
- Vì $f(8) = -3 < 0$ nên $f(x) < 0$ với $\forall x \in (3, +\infty)$.

b. Hàm số f(x) liên tục trên $[-\frac{3}{2}, +\infty)$.

Giải phương trình f(x) = 0, ta có:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+3} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x + 3 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Như vậy, trên các khoảng $(-\frac{3}{2}, 3)$ và $(3, +\infty)$ hàm số f(x) không triệt tiêu, do đó:

- Vì $f(0) = -\sqrt{3} < 0$ nên $f(x) < 0$ với $\forall x \in (-\frac{3}{2}, 3)$.
- Vì $f(11) = 6 > 0$ nên $f(x) > 0$ với $\forall x \in (3, +\infty)$.

c. Hàm số f(x) liên tục trên $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

Giải phương trình f(x) = 0, ta có:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 1} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 1 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Như vậy, trên các khoảng $(-\infty, -1]$ và $(1, +\infty)$ hàm số f(x) không triệt tiêu, do đó:

- Vì $f(-1) = 2 > 0$ nên $f(x) > 0$ với $\forall x \in (-\infty, -1]$.
- Vì $f(2) = \sqrt{3} - 1 < 0$ nên $f(x) < 0$ với $\forall x \in (1, +\infty)$.

d. Hàm số f(x) liên tục trên $[-1, +\infty)$.

Giải phương trình f(x) = 0, ta có:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 1 - x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq 1 \\ x + 1 = (1 - x^2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq 1 \\ x^4 - 2x^2 - x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq 1 \\ x(x+1)(x^2 - x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x = 0 \end{array}\right. .$$

Như vậy, trên các khoảng $(-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$; $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0)$ và $(0, +\infty)$ hàm số f(x) không triệt tiêu, do đó:

- Vì $f(-\frac{16}{25}) = \frac{6}{625} > 0$ nên $f(x) > 0$ với $\forall x \in (-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$.
- Vì $f(-\frac{9}{25}) = -\frac{44}{625} < 0$ nên $f(x) < 0$ với $\forall x \in (\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0)$.
- Vì $f(3) = 10 > 0$ nên $f(x) > 0$ với $\forall x \in (0, +\infty)$.

Bài tập 10. Điều kiện:

$$\begin{cases} 3x + 4 \geq 0 \\ 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}. \\ x + 3 \geq 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Hàm số f(x) liên tục trên $[-\frac{1}{2}, +\infty)$.

Giải phương trình f(x) = 0, ta có:

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{2x+1} = \sqrt{3x+4}$$

$$\Leftrightarrow (x+3) + (2x+1) + 2\sqrt{(x+3)(2x+1)} = 3x + 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+3)(2x+1)} = 0 \Leftrightarrow (x+3)(2x+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \overset{(*)}{\Leftrightarrow} x = -\frac{1}{2}.$$

Như vậy, trên khoảng $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ hàm số f(x) không triệt tiêu, do đó:

- Vì $f(0) = 1 - \sqrt{3} < 0$ nên $f(x) < 0$ với $\forall x \in (-\frac{1}{2}, +\infty)$.

Bài tập 11.

a. *Bạn đọc tự làm.*

b. *Bạn đọc tự làm.*

c. Ta chỉ cần xét trên một chu kì tuần hoàn $[0, \pi]$.

Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2}$.

Hàm số f(x) liên tục trên $[0, \pi]\backslash\{\frac{\pi}{2}\}$.

Giải phương trình f(x) = 0, ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ

Đặt t = tgx, suy ra $\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$\frac{2t}{1+t^2} + 2t = 3 \Leftrightarrow 2t^3 - 3t^2 + 4t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(2t^2 - t + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow tgx = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}.$$

Cách 2: Sử dụng phương pháp luận hệ số để phân tích

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2(tgx - 1) = 1 - \sin 2x \Leftrightarrow 2(\frac{\sin x}{\cos x} - 1) = \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x.\cos x$$

$$\Leftrightarrow 2(\sin x - \cos x) = (\sin x - \cos x)^2.\cos x$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)[(\sin x - \cos x).\cos x - 2] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(\sin x.\cos x - \cos^2 x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x - \cos x = 0 \\ \sin x.\cos x - \cos^2 x - 2 = 0 \ (vn) \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x - \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \cos x \Leftrightarrow tgx = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}.$$

Như vậy, trên các khoảng $[0, \frac{\pi}{4})$; $(\frac{\pi}{4}, \pi]\backslash\{\frac{\pi}{2}\}$ hàm số f(x) không triệt tiêu, do đó:

- Vì $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}} - 3 < 0$ nên $f(x) < 0$ với $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4})$.
- Vì $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3} - 3 > 0$ nên $f(x) > 0$ với $\forall x \in (\frac{\pi}{4}, \pi]\backslash\{\frac{\pi}{2}\}$.

d. *Bạn đọc tự làm.*

Bài tập 12.

a. Ta chỉ cần xét trên một chu kì tuần hoàn $[0, \pi]$.

Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2}$.

Hàm số f(x) liên tục trên $[0, \pi]\backslash\{\frac{\pi}{2}\}$.

Giải phương trình f(x) = 0, bằng cách đặt t = tgx, suy ra $\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$(1-t)(1 + \frac{2t}{1+t^2}) - 1 - t = 0 \Leftrightarrow (1-t)(1+t)^2 - (1+t)(1+t^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+t)[(1-t)(1+t)-(1+t^2)] = 0 \Leftrightarrow -2t^2(1+t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}x = 0 \\ \mathrm{tg}x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{3\pi}{4} \\ x = \pi \end{array}\right. .$$

Như vậy, trên các khoảng $(0, \frac{3\pi}{4})\backslash\{\frac{\pi}{2}\}$; $(\frac{3\pi}{4}, \pi)$ hàm số f(x) không triệt tiêu, do đó:

- Vì $f(\frac{\pi}{4}) = -2 < 0$ nên $f(x) < 0$ với $\forall x \in (0, \frac{3\pi}{4})\backslash\{\frac{\pi}{2}\}$.
- Vì $f(\frac{5\pi}{6}) = \left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$ nên $f(x) > 0$ với $\forall x \in (\frac{3\pi}{4}, \pi)$.

b. *Hướng dẫn*: Đặt $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$ khi đó:

$$\mathrm{cotg}\frac{x}{2} = \frac{1}{t};\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \text{ và } \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

CHƯƠNG IV

HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

CHỦ ĐỀ 1

LUỸ THỪA – HÀM SỐ MŨ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. LUỸ THỪA

1.1. Luỹ thừa với số mũ nguyên

Với $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, $n \in \mathbf{Z}$ ta có định nghĩa:

1. $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

2. $a^{n+1} = a.a^n$, $a^{-n} = (a^{-1})^n = \frac{1}{a^n}$.

1.2. Căn bậc n

Cho $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{Z}$, $n > 1$, ta có:

- $x \in \mathbf{R}$ là căn bậc n của $a \Leftrightarrow x^n = a$.
- a có duy nhất một căn bậc n lẻ, ký hiệu $\sqrt[n]{a}$.
- $a > 0$ có 2 căn bậc n chẵn, ký hiệu $\sqrt[n]{a}$ và $-\sqrt[n]{a}$, trong đó $\sqrt[n]{a} > 0$, $-\sqrt[n]{a} < 0$

Từ đó với $a, b \in \mathbf{R}$, $a, b > 0$, $n, m, k \in \mathbf{Z}$, $n, m, k > 1$ ta có các kết quả sau:

1. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$.
2. $\sqrt[n]{a^{n.m}} = a^m$; $\quad \sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$.
3. $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$; $\quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.
4. $a > b \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.
5. Với $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$ thì $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$.

1.3. Luỹ thừa với số mũ hữu tỉ

Cho $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$, $n, m \in \mathbf{Z}$, $n > 1$, ta định nghĩa:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ và quy ước } 0^{\frac{m}{n}} = 0 \text{ với } m > 0.$$

Từ đó $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

1.4. Luỹ thừa với số mũ vô tỉ

Cho $a, x \in \mathbf{R}$, $a > 0$, (x_n) là dãy số hữu tỉ đơn điệu thoả mãn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, ta định nghĩa $a^x = \lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n}$.

1.5. Tính chất

Cho a, b $\in$ **R**, a, b > 0, x, y $\in$ **R**, ta có:

(1). $a^x > 0$.

(2). $a^x.a^y = a^{x+y}$.

(3). $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.

(4). $(a^x)^y = a^{xy}$.

(5). $(ab)^x = a^x.b^x$.

(6). $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.

(7). Với a, b ≠ 1 và 0 < b < a thì:

- $x > 0 \Leftrightarrow b^x < a^x$.
- $x < 0 \Leftrightarrow b^x > a^x$.

2. HÀM SỐ MŨ

2.1. Định nghĩa

Hàm số mũ cơ số a ($0 < a \neq 1$) là hàm số xác định bởi công thức $y = a^x$.

2.2. Tính chất

Xét hàm số $y = a^x$, $0 < a \neq 1$, ta có các tính chất sau:

1. Liên tục trên **R**.
2. Sự biến thiên: Hàm số đơn điệu với mọi x.
   - Với a > 1 thì $a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$, tức là hàm số đồng biến.
   - Với 0 < a < 1 thì $a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$, tức là hàm số nghịch biến.
3. Đồ thị của hàm số có 2 dạng và luôn cắt trục Oy tại A(0, 1).

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN VÀ BÀI TẬP

Bài toán 1: Các phép toán về luỹ thừa.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng các kết quả đã biết và cần lưu ý:

1. Với a $\in$ **R**, n $\in$ **N**, n > 1 thì $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$.
2. Ngược lại $a\sqrt[2n]{A} = \begin{cases} \sqrt[2n]{a^{2n}.A} & \text{khi } a \geq 0 \\ -\sqrt[2n]{a^{2n}.A} & \text{khi } a < 0 \end{cases}$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 1. Rút gọn các biểu thức sau:

a. $A = \dfrac{ab^{-2}(ab^{-1})^2(a^{-1}b^2)}{a^{-2}b(a^{-2}b^{-1})^3}$.

☐ $A = a^{10}b^2$. ☐ $A = a^2b^{10}$. ☐ $A = a^{10}$. ☐ $A = b^{10}$.

b. $B = \dfrac{ab\sqrt[n]{\dfrac{a^{1-n}}{b^{n}} - \dfrac{a^{-n}}{b^{n-1}}}}{\sqrt[n]{a-b}}$, với $0 < a < b$.

☐ $B = ab$. ☐ $B = a - b$. ☐ $B = a + b$. ☐ $B = 1$.

Bài tập 2. Rút gọn biểu thức :

$$A = \left[\frac{4a - 9a^{-1}}{2a^{\frac{1}{2}} - 3a^{-\frac{1}{2}}} + \frac{a - 4 + 3a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}}\right]^2, \text{ với } 0 < a \neq 1, \frac{3}{2}.$$

☐ $A = a^2 + a$. ☐ $A = a^2 - a$. ☐ $A = 9a$. ☐ $A = 2a$.

Bài tập 3. Rút gọn biểu thức :

$$A = \frac{\sqrt[3]{a + \sqrt{2 - a^2}}\,.\sqrt[6]{32(1 - a\sqrt{2 - a^2})}}{\sqrt[3]{1 - a^2}}.$$

☐ $A = \begin{cases} 2 \text{ khi } 1 < |a| \leq \sqrt{2} \\ -2 \text{ khi } |a| < 1 \end{cases}$. ☐ $A = \begin{cases} 1 \text{ khi } 1 < |a| \leq \sqrt{2} \\ -1 \text{ khi } |a| < 1 \end{cases}$.

☐ $A = \begin{cases} 2 \text{ khi } |a| < 1 \\ -2 \text{ khi } 1 < |a| \leq \sqrt{2} \end{cases}$. ☐ $A = \begin{cases} 1 \text{ khi } |a| < 1 \\ -1 \text{ khi } 1 < |a| \leq \sqrt{2} \end{cases}$.

Bài tập 4. Rút gọn biểu thức :

$$A = \frac{2ab\sqrt{1 - x^2}}{1 + \sqrt{1 - x^2}}, \text{ với } x = 2\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^{-1}, \ a, b < 0.$$

☐ $A = \begin{cases} a \text{ khi } a \geq b \\ b \text{ khi } a < b \end{cases}$. ☐ $A = \begin{cases} a(a - b) \text{ khi } a \geq b \\ b(a - b) \text{ khi } a < b \end{cases}$.

☐ $A = \begin{cases} b - a \text{ khi } a \geq b \\ a - b \text{ khi } a < b \end{cases}$. ☐ $A = \begin{cases} a(b - a) \text{ khi } a \geq b \\ b(a - b) \text{ khi } a < b \end{cases}$.

Bài tập 5. Chứng minh rằng $ax^2 + by^2 + cz^2 = (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})^3$, biết:

$$ax^3 = by^3 = cz^3 \text{ và } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1.$$

Bài toán 2: So sánh các số có dạng luỹ thừa.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng các kết quả:

1. Với $a > 1$ thì $a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$.
2. Với $0 < a < 1$ thì $a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$.
3. Với $a, b \neq 1$ và $0 < b < a$ thì:
   - $x > 0 \Leftrightarrow b^x < a^x$.
   - $x < 0 \Leftrightarrow b^x > a^x$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 6. Nhận xét gì về cơ số a, biết:

a. $a^{\frac{1}{2}} > a^{3}$.

☐ $0 < a < 1$.   ☐ $a > 1$.

b. $a^{-\frac{3}{2}} < a^{\frac{2}{3}}$.

☐ $0 < a < 1$.   ☐ $a > 1$.

Bài tập 7. So sánh a, b biết:

a. $\pi^{a} > \pi^{b}$.

☐ $0 > a > b$.   ☐ $0 < a < b$.   ☐ $a > b$.   ☐ $a < b < 0$.

b. $(\sqrt{5} - 2)^{a} > (\sqrt{5} + 2)^{b}$.

☐ $a > b$.   ☐ $a < b$.   ☐ $-a > b$.   ☐ $-a < b$.

Bài tập 8. So sánh a, b biết:

a. $a = (2-\sqrt{3})^{\frac{3}{2}}$ và $b = (7+4\sqrt{3})^{-\frac{2}{3}}$.

☐ $a > b$.   ☐ $a < b$.   ☐ $a = b$.

b. $a = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}$ và $b = (9\sqrt{3}+11\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}$.

☐ $a > b$.   ☐ $a < b$.   ☐ $a = b$.

Bài tập 9. So sánh a, b biết $a = 2^{300}$ và $b = 3^{200}$.

☐ $a > b$.   ☐ $a < b$.   ☐ $a = b$.

Bài tập 10. So sánh a, b biết:

a. $a = (\sqrt{5}-2)^{\frac{3}{2}}$ và $b = (\sqrt{5}-2)^{\frac{5}{3}}$.

☐ $a > b$.   ☐ $a < b$.   ☐ $a = b$.

b. $a = (4-\sqrt{3})^{\frac{2}{3}}$ và $b = (\sqrt{4+\sqrt{3}})^{\frac{5}{4}}$.

☐ $a > b$.   ☐ $a < b$.   ☐ $a = b$.

Bài tập 11. So sánh a, b biết:

a. $a = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$ và $b = \frac{8}{\sqrt[4]{27}}$.

☐ $a > b$.   ☐ $a < b$.   ☐ $a = b$.

b. $a = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\sqrt{2}}$ và $b = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{-\sqrt{3}}$.

☐ $a > b$.   ☐ $a < b$.   ☐ $a = b$.

Bài toán 3: Tìm tập xác định của hàm số mũ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Xét hàm số $y = [f_1(x)]^{f_2(x)}$.

Để tìm tập xác định D của hàm số ta đi giải điều kiện:

$$\begin{cases} f_1(x) \text{ có nghĩa và } f_1(x) > 0 \\ f_2(x) \text{ có nghĩa} \end{cases}.$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 12. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = (\sqrt{-x^2 + 4x - 3} - 2x + 5)^{x+2}$.

☐ $[1; 3]$. ☐ $(-\infty; 1]$. ☐ $[3; +\infty)$. ☐ $[1; \frac{14}{5}]$.

b. $y = (\frac{2x}{\sqrt{2x+1} - 1} - 2x - 2)^{\lg x}$.

☐ $(-\frac{1}{2}; +\infty)$. ☐ $(-\frac{1}{2};+\infty)\backslash\{0\}$. ☐ $(-\frac{1}{2}; 0)$. ☐ $\mathbf{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}$

Bài tập 13. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = (x + \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 4}} - 3\sqrt{5})^{x+\text{cotg}x}$.

☐ $(-\infty;-2) \cup (2,+\infty)$. ☐ $(2, 5)\backslash\{ k\pi, k \in \mathbf{Z} \}$.

☐ $(-\infty;-2) \cup (2,+\infty)\backslash\{ k\pi, k \in \mathbf{Z} \}$. ☐ $(2, \sqrt{5}) \cup (\sqrt{20}, +\infty)\backslash\{ k\pi, k \in \mathbf{Z} \}$.

b. $y = (2\cos^2 x - 3\cos x + 1)^{\sin x}$.

☐ $(\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{11\pi}{6} + k\pi), k \in Z$. ☐ $(\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{5\pi}{4} + k\pi), k \in Z$.

☐ $(\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{11\pi}{6} + 2k\pi), k \in Z$. ☐ $(\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{5\pi}{4} + 2k\pi), k \in Z$.

Bài toán 4: Tìm giới hạn của hàm số mũ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Chúng ta có các dạng giới hạn đặc biệt sau :

a. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

b. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$.

c. $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 14. Tính các giới hạn sau:

a. $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5^x - 2^x}{x^2 - 3x}$.

☐ $\dfrac{5}{2}\ln 3$. ☐ $-\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{5}{2}$. ☐ $-\dfrac{1}{3}$. ☐ $\ln\dfrac{5}{2}$.

b. $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^x - 2^x}{4^x - 3^x}$.

☐ $\ln\dfrac{3}{2}$. ☐ $\ln\dfrac{4}{3}$. ☐ $\log_{4/3}\dfrac{3}{2}$. ☐ $\log_{3/2}\dfrac{4}{3}$.

c. $L = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2^x - 2x}{x - 1}$.

☐ $2\ln 2 - 2$. ☐ $2\ln 2 - 1$. ☐ $\ln 2 - 2$. ☐ $\ln 2 - 1$.

d. $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(4^x - 3^x)(3^x - 2^x)}{(8^x - 6^x)(4^x - 2^x)}$.

☐ $\dfrac{4}{3}\ln\dfrac{3}{2}$. ☐ $\dfrac{4}{3}\ln 2$. ☐ $\log_2\dfrac{3}{2}$. ☐ $\log_2\dfrac{4}{3}$.

Bài tập 15. Tính các giới hạn sau:

a. $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 - e^x)(1 - \cos 2x)}{x^3 + x^2}$.

☐ 0. ☐ 1. ☐ e. ☐ e^2.

b. $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x^2}.\cos^2 x - 1}{x^2}$.

☐ 0. ☐ 1. ☐ $\dfrac{3}{2}$. ☐ $\dfrac{e}{2}$.

Bài tập 16. Tính các giới hạn sau:

a. $L = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

☐ 1. ☐ e. ☐ e^2. ☐ e^3.

b. $L = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x + 2}{x + 1}\right)^{2x+1}$.

☐ e. ☐ e^2. ☐ e^3. ☐ $\dfrac{1}{e^2}$.

Bài tập 17. Tính các giới hạn sau:

a. $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$, với a > 0.

☐ 0. ☐ a ☐ e^a. ☐ lna.

b. $L = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{a^{a^x} - a^{x^a}}{a^x - x^a}$, với a > 0.

☐ lna. ☐ a.lna. ☐ a^a lna. ☐ a^{a^a} lna.

c. $L = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{a^{x^2} + b^{x^2}}{a^x + b^x} \right)^{\frac{1}{x}}$.

☐ $\dfrac{1}{a+b}$. ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{a+b}}$. ☐ $\dfrac{1}{ab}$. ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$.

d. $L = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a+b+c} \right)^{\frac{1}{x}}$, với a, b, c > 0.

☐ $(abc)^{\frac{1}{a+b+c}}$. ☐ $(a+b+c)^{\frac{1}{a+b+c}}$.

☐ $(a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}}$.. ☐ $(a^a + b^b + c^c)^{\frac{1}{a+b+c}}$.

Bài tập 18. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\sin x}$.

☐ 0. ☐ 1. ☐ e. ☐ e^2.

Bài tập 19. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-2x^2} - \sqrt[3]{1 + x^2}}{\ln(1 + x^2)}$.

☐ $\dfrac{1}{3}$. ☐ $-\dfrac{2}{3}$. ☐ $\dfrac{5}{3}$. ☐ $-\dfrac{7}{3}$.

Bài toán 5: Xét tính liên tục của hàm số mũ tại điểm x_0.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Khẳng định rằng hàm số xác định tại điểm x_0, tính $f(x_0)$.

Bước 2: Xác định $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Bước 3: Kiểm nghiệm $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Bước 4: Kết luận.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 20. Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm $x_0 = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x} - 1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} & \text{khi } x \neq 0 \\ 2 & \text{khi } x = 0 \end{cases}.$$

☐ Liên tục tại x_0. ☐ Không liên tục tại x_0.

Bài tập 21. Xác định a để hàm số sau liên tục trên **R**:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\sin x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 3a + 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}.$$

☐ 0. ☐ 1. ☐ e. ☐ e + 1.

III. HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Ta có:

$$A = \frac{a^{1+2-1}b^{-2-2+2}}{a^{-2-6}b^{1-3}} = \frac{a^2b^{-2}}{a^{-8}b^{-2}} = a^{10}.$$

b. Ta có:

$$B = \frac{ab\sqrt[n]{\dfrac{a}{a^nb^n} - \dfrac{b}{a^nb^n}}}{\sqrt[n]{a-b}} = \frac{ab\sqrt[n]{\dfrac{1}{a^nb^n}(a-b)}}{\sqrt[n]{a-b}} = \frac{\dfrac{ab}{|ab|}\sqrt[n]{a-b}}{\sqrt[n]{a-b}} = 1.$$

Bài tập 2. Ta có:

$$A = \left[\frac{4a - \dfrac{9}{a}}{2\sqrt{a} - \dfrac{3}{\sqrt{a}}} + \frac{a - 4 + \dfrac{3}{a}}{\sqrt{a} - \dfrac{1}{\sqrt{a}}}\right]^2 = \left[\frac{4a^2 - 9}{(2a-3)\sqrt{a}} + \frac{a^2 - 4a + 3}{(a-1)\sqrt{a}}\right]^2$$

$$= \left[\frac{2a+3}{\sqrt{a}} + \frac{a-3}{\sqrt{a}}\right]^2 = \left(\frac{3a}{\sqrt{a}}\right)^2 = 9a.$$

Bài tập 3. Điều kiện có nghĩa của biểu thức:

$$\begin{cases} 2 - a^2 \geq 0 \\ 1 - a\sqrt{2 - a^2} \geq 0 \\ 1 - a^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| \leq \sqrt{2} \\ a\sqrt{2 - a^2} \leq 1 \\ a \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq |a| \leq \sqrt{2} \\ \left[\begin{array}{l} a \leq 0 \\ \begin{cases} a > 0 \\ a^2(2 - a^2) \leq 1 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 1 \neq |a| \leq \sqrt{2}. \qquad (*)$$

Ta có:

$$A = \frac{\sqrt[6]{(a+\sqrt{2-a^2})^2}.\sqrt[6]{32(1-a\sqrt{2-a^2})}}{\sqrt[3]{1-a^2}}$$

$$= \frac{\sqrt[6]{2(1+a\sqrt{2-a^2})}.\sqrt[6]{32(1-a\sqrt{2-a^2})}}{\sqrt[3]{1-a^2}}$$

$$= \frac{\sqrt[6]{64[1-a^2(2-a^2)]}}{\sqrt[3]{1-a^2}} = \frac{2\sqrt[6]{1-a^2(2-a^2)}}{\sqrt[3]{1-a^2}} = \frac{2\sqrt[6]{(1-a^2)^2}}{\sqrt[3]{1-a^2}}$$

$$= \frac{2|\sqrt[3]{1-a^2}|}{\sqrt[3]{1-a^2}} = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt[3]{1-a^2}}{\sqrt[3]{1-a^2}} & \text{khi } 1-a^2>0 \\ -\dfrac{2\sqrt[3]{1-a^2}}{\sqrt[3]{1-a^2}} & \text{khi } 1-a^2<0 \end{cases} \overset{(*)}{=} \begin{cases} 2 & \text{khi} |a|<1 \\ -2 & \text{khi } 1<|a|\le\sqrt{2} \end{cases}.$$

Bài tập 4. Điều kiện $1-x^2\ge 0 \Leftrightarrow -1\le x\le 1$.

Với điều kiện a, b < 0, ta đi biến đổi:

$$x = 2\left(\frac{\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}}{\sqrt{ab}}\right)^{-1} = 2\left(\frac{|a|+|b|}{\sqrt{ab}}\right)^{-1} = 2\left(\frac{-a-b}{\sqrt{ab}}\right)^{-1} = -\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}.$$

suy ra:

$$1-x^2 = 1-\frac{4ab}{(a+b)^2} = \frac{(a+b)^2-4ab}{(a+b)^2} = \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2},$$

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{|a-b|}{|a+b|} = -\frac{|a-b|}{a+b},$$

$$1+\sqrt{1-x^2} = 1-\frac{|a-b|}{a+b} = \frac{a+b-|a-b|}{a+b}.$$

Do đó:

$$A = \frac{\dfrac{-2ab|a-b|}{a+b}}{\dfrac{a+b-|a-b|}{a+b}} = \frac{-2ab|a-b|}{a+b-|a-b|} = \begin{cases} \dfrac{-2ab(a-b)}{a+b-(a-b)} & \text{khi } a\ge b \\ \dfrac{2ab(a-b)}{a+b+(a-b)} & \text{khi } a<b \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -a(a-b) & \text{khi } a\ge b \\ b(a-b) & \text{khi } a<b \end{cases}.$$

Bài tập 5. Lần lượt nhận xét rằng:

$$ax^2+by^2+cz^2 = \frac{ax^3}{x}+\frac{by^3}{y}+\frac{cz^3}{z} = \frac{ax^3}{x}+\frac{ax^3}{y}+\frac{ax^3}{z}$$

$$= ax^3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = ax^3. \qquad (1)$$

$$(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})^3 = \left(\frac{\sqrt[3]{ax^3}}{x}+\frac{\sqrt[3]{by^3}}{y}+\frac{\sqrt[3]{cz^3}}{z}\right)^3$$

$$= ax^3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^3 = ax^3. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $ax^2+by^2+cz^2 = (\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})^3$, đpcm.

Bài tập 6.

a. $a < 1$.

b. $a > 1$.

Bài tập 7.

a. $a > b$.

b. $-a > b$.

Bài tập 8.

a. Ta có:

$$b = (7+4\sqrt{3})^{-\frac{2}{3}} = [(2+\sqrt{3})^2]^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^{-\frac{4}{3}} = (2-\sqrt{3})^{\frac{4}{3}}.$$

Vì:

$$\begin{cases} 0 < 2-\sqrt{3} < 1 \\ \dfrac{3}{2} > \dfrac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow (2-\sqrt{3})^{\frac{3}{2}} < (2-\sqrt{3})^{\frac{4}{3}} \Leftrightarrow a < b.$$

b. Ta có:

$$b = (9\sqrt{3}+11\sqrt{2})^{\frac{2}{3}} = [(\sqrt{3}+\sqrt{2})^3]^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^2 = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-2}.$$

Vì:

$$\begin{cases} 0 < \sqrt{3}-\sqrt{2} < 1 \\ \dfrac{1}{2} > -2 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{\frac{1}{2}} < (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-2} \Leftrightarrow a < b.$$

Bài tập 9. Ta có:

$$2^3 = 8 < 9 = 3^2 \Rightarrow (2^3)^{100} < (3^2)^{100} \Leftrightarrow 2^{300} < 3^{200} \Leftrightarrow a < b.$$

Bài tập 10.

a. $a > b$.

b. $a < b$.

Bài tập 11.

a. $a < b$.

b. $a < b$.

Bài tập 12.

a. Hàm số xác định khi:

$$\sqrt{-x^2+4x-3} - 2x + 5 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{-x^2+4x-3} > 2x-5$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-5<0 \\ -x^2+4x-3 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-5 \ge 0 \\ -x^2+4x-3 > (2x-5)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 5/2 \\ 1 \le x \le 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 5/2 \\ 5x^2 - 24x + 28 < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \le x < 5/2 \\ \begin{cases} x \ge 5/2 \\ 2 < x < 14/5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 1 \le x < \frac{14}{5}.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $[1; \frac{14}{5})$.

b. Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} 2x + 1 \ge 0 & (1) \\ \sqrt{2x+1} - 1 \ne 0 & (2) \\ \cos x \ne 0 & (3) \\ \dfrac{2x}{\sqrt{2x+1} - 1} - 2x - 2 > 0 & (4) \end{cases}$$

Giải (1) và (2) ta được $0 \le 2x + 1 \ne 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le x \ne 0$. (*)

Giải (3) ta được $x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$. (**)

Giải (4) bằng việc trục căn thức, ta biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\sqrt{2x+1} + 1 > 2x + 2 \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} > 2x + 1 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} 4x^2 + 2x < 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < 0. \qquad (***)$$

Kết hợp (*), (**) và (***) ta được tập xác định của hàm số là $(-\frac{1}{2}; 0)$.

Bài tập 13.

a. Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} x^2 - 4 > 0 & (1) \\ \sin x \ne 0 & (2) \\ x + \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 - 4}} - 3\sqrt{5} > 0 & (3) \end{cases}$$

Giải (1) ta được $|x| > 2$. (*)

Giải (2) ta được $x \ne k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$. (**)

Giải (3), ta viết lại dưới dạng:

$$x + \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 4}} > 3\sqrt{5}. \qquad (4)$$

Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1 : Với $x < -2$

Bất phương trình (4) vô nghiệm (do vế trái âm).

Trường hợp 2 : Với $x > 2$, bình phương 2 vế của (4) ta được :

$$x^2 + \frac{4x^2}{x^2-4} + \frac{4x^2}{\sqrt{x^2-4}} > 45 \Leftrightarrow \frac{x^4}{x^2-4} + 4.\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} > 45. \qquad (5)$$

Đặt $t = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}$, điều kiện $t > 0$. Khi đó, bất phương trình (5) có dạng:

$$t^2 + 4t - 45 > 0 \overset{t>0}{\Leftrightarrow} t > 5 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} > 5 \Leftrightarrow x^4 - 25x^2 + 100 > 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 > 20 \\ x^2 < 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x| > \sqrt{20} \\ |x| < \sqrt{5} \end{array}\right. \Rightarrow x \in (2, \sqrt{5}) \cup (\sqrt{20}, +\infty).$$

b. Hàm số xác định khi:

$$2\cos^2x - 3\cos x + 1 > 0. \qquad (1)$$

Đặt $t = \cos x$, điều kiện $|t| \le 1$.

Khi đó, bất phương trình (1) có dạng:

$$2t^2 - 3t + 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t > 1 \text{ loại} \\ t < \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow t < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{11\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in Z.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $(\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{11\pi}{6} + 2k\pi)$, $k \in Z$.

Bài tập 14.

a. Ta biến đổi:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\ln 5^x} - e^{\ln 2^x}}{x(x-3)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln 5.\dfrac{e^{x\ln 5}-1}{x\ln 5} - \ln 2.\dfrac{e^{x\ln 2}-1}{x}}{x-3}$$

$$= \frac{\ln 5 - \ln 2}{-3} = -\frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}.$$

b. Ta biến đổi:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\ln 3^x} - e^{\ln 2^x}}{e^{\ln 4^x} - e^{\ln 3^x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln 3.\dfrac{e^{x\ln 3}-1}{x\ln 3} - \ln 2.\dfrac{e^{x\ln 2}-1}{x\ln 2}}{\ln 4.\dfrac{e^{x\ln 4}-1}{x\ln 4} - \ln 3.\dfrac{e^{x\ln 3}-1}{x\ln 3}}$$

$$= \frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 4 - \ln 3} = \frac{\ln\dfrac{3}{2}}{\ln\dfrac{4}{3}} = \log_{4/3}\frac{3}{2}.$$

c. Ta biến đổi:

$$L=\lim_{x\to1}\frac{2.2^{x-1}-2x}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2.e^{\ln 2^{x-1}}-2x}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2(e^{(x-1)\ln2}-1)-2x+2}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2\ln2.(e^{(x-1)\ln2}-1)}{(x-1)\ln2}-2=2\ln2-2.$$

d. Ta biến đổi:

$$L=\lim_{x\to0}\frac{(e^{\ln4^x}-e^{\ln3^x})(e^{\ln3^x}-e^{\ln2^x})}{(e^{\ln8^x}-e^{\ln6^x})(e^{\ln4^x}-e^{\ln2^x})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\ln4.\frac{e^{x\ln4}-1}{x\ln4}-\ln3.\frac{e^{x\ln3}-1}{x\ln3}\right)\left(\ln3.\frac{e^{x\ln3}-1}{x\ln3}-\ln2.\frac{e^{x\ln2}-1}{x\ln2}\right)}{\left(\ln8.\frac{e^{x\ln8}-1}{x\ln8}-\ln6.\frac{e^{x\ln6}-1}{x\ln6}\right)\left(\ln4.\frac{e^{x\ln4}-1}{x\ln4}-\ln2.\frac{e^{x\ln2}-1}{x\ln2}\right)}$$

$$=\frac{(\ln4-\ln3)(\ln3-\ln2)}{(\ln8-\ln6)(\ln4-\ln2)}=\frac{\ln\frac{4}{3}.\ln\frac{3}{2}}{\ln\frac{8}{6}.\ln\frac{4}{2}}=\log_2\frac{3}{2}.$$

Bài tập 15.

a. Ta biến đổi:

$$L=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1-e^x}{x}.\frac{2\sin^2x}{x^2}}{x+1}.x=\frac{-1.2}{1}.0=0.$$

b. Ta biến đổi:

$$L=\lim_{x\to0}\frac{\cos^2x.(e^{2x^2}-1)+\cos^2x-1}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{2\cos^2x.(e^{2x^2}-1)}{2x^2}-\frac{\sin^2x}{x^2}\right]=2-1=1.$$

Bài tập 16.

a. L = 1.

b. Ta có:

$$\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{2x+1}=\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{2x+1}.$$

đặt $\frac{1}{t}=\frac{1}{x+1}\Leftrightarrow x=t-1.$

Nhận xét khi $x\to\infty$ thì $t\to\infty$.

Vậy, ta được:

$$\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{2x+1}=\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2(t-1)+1}=\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t\frac{2t-1}{t}}.$$

Do đó :

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{2x+1} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t\frac{2t-1}{t}} = e^2.$$

Bài tập 17.

a. Ta biến đổi:

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\ln a^x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}.\ln a = \ln a.$$

b. Ta biến đổi:

$$L = \lim_{x\to a}\frac{(a^{a^x-x^a}-1)a^{x^a}}{a^x-x^a} = \lim_{x\to a}\frac{(e^{\ln a^{a^x-x^a}}-1)a^{x^a}}{a^x-x^a}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{(e^{(a^x-x^a)\ln a}-1)a^{x^a}.\ln a}{(a^x-x^a)\ln a} = a^{a^a}\ln a.$$

c. $L = \dfrac{1}{\sqrt{ab}}$.

d. $L = (a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}}$.

Bài tập 18. Ta biến đổi:

$$L = \lim_{x\to 0}\left(2\cos x\frac{e^{\sin 2x}-1}{\sin 2x}+\frac{1-e^{\sin x}}{\sin x}\right) = 2-1 = 1.$$

Bài tập 19. Ta biến đổi:

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x^2}-1+1-\sqrt[3]{1+x^2}}{\ln(1+x^2)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{e^{-2x^2}-1}{x^2}+\frac{1-\sqrt[3]{1+x^2}}{x^2}\right]\frac{x^2}{\ln(1+x^2)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[-2.\frac{e^{-2x^2}-1}{-2x^2}+\frac{1-(1+x^2)}{x^2[1+\sqrt[3]{1+x^2}+\sqrt[3]{(1+x^2)^2}]}\right]\frac{x^2}{\ln(1+x^2)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[-2.\frac{e^{-2x^2}-1}{-2x^2}+\frac{-1}{[1+\sqrt[3]{1+x^2}+\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}\right]\frac{x^2}{\ln(1+x^2)} = -\frac{7}{3}.$$

Bài tập 20. Hs liên tục tại $x_0 = 0$.

Bài tập 21. $a = 0$.

CHỦ ĐỀ 2

LOGARIT – HÀM SỐ LOGARIT

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. LOGARIT

1.1. Định nghĩa

Cho $0 < a \neq 1$, $b > 0$, ta định nghĩa:

$$c = \log_a b \Leftrightarrow b = a^c,$$

từ định nghĩa ta được

$$\log_a 1 = 0,\ \log_a a^\alpha = \alpha,\ a^{\log_a b} = b.$$

Ta sử dụng ký hiệu:

- $\log_{10} b = \lg b$, đọc là lốc của b.
- $\log_e b = \ln b$, đọc là loga Nêpe của b.

1.2. Tính chất

Cho $0 < a \neq 1$, $x, y > 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$, ta có:

(1). $\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$,
trong trường hợp chỉ có $x.y > 0$ thì $\log_a(xy) = \log_a|x| + \log_a|y|$.

(2). $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$,

trong trường hợp chỉ có $x.y > 0$ thì $\log_a \frac{x}{y} = \log_a|x| - \log_a|y|$.

(3). $\log_a b^\alpha = \alpha\log_a b$,
trong trường hợp $b \in \mathbf{R}$ và $\alpha = 2k$, $k \in \mathbf{Z}$ thì $\log_a b^\alpha = \alpha\log_a|b|$.

(4). $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha}\log_a b$,

trong trường hợp $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 1$ và $\alpha = 2k$, $k \in \mathbf{Z}$ thì $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha}\log_{|a|} b$.

1.3. Công thức đổi cơ số

Cho $0 < a, b \neq 1$, $c > 0$, ta có:

(1). $\log_a c = \dfrac{\log_b c}{\log_b a}$

(2). $\log_b c = \log_b a.\log_a c$.

(3). $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

(4). $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ với $ab \neq 1$.

2. HÀM SỐ LOGARIT

2.1. Định nghĩa

Hàm số logarit cơ số a $(0 < a \neq 1)$ là hàm số xác định bởi công thức:

$$y = \log_a x.$$

2.2. Tính chất

Xét hàm số $y = \log_a x$, với $0 < a \neq 1$, ta có các tính chất sau:

1. Hàm số liên tục trên $D = (0, +\infty)$ và tập giá trị $I = \mathbf{R}$.
2. Sự biến thiên: Hàm số đơn điệu với mọi x.
   - Với $a > 1$ thì $\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$, tức là hàm số đồng biến.
   - Với $0 < a < 1$ thì $\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$, tức là hàm số nghịch biến.
3. Đồ thị của hàm số luôn cắt trục Ox tại B(1, 0).

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN VÀ BÀI TẬP

Bài toán 1: Các phép toán logarit.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng các kết quả đã biết, ngoài ra:

1 Để tính $\log_a b$ ta biến đổi $b = a^{\alpha}$, từ đó

$$\log_a b = \log_a a^{\alpha} = \alpha.$$

2 Để tính $b^{\log_a c}$ ta biến đổi $b = a^{\alpha}$, từ đó

$$b^{\log_a c} = a^{\alpha\log_a c} = (a^{\log_a c})^{\alpha} = c^{\alpha}.$$

3 Để tính $\log_a b$ theo $m = \log_a x$ và $n = \log_a y$ ta biến đổi $b = a^{\alpha}.x^{\beta}.y^{\gamma}$, từ đó

$$\log_a b = \log_a (a^{\alpha}.x^{\beta}.y^{\gamma}) = \log_a a^{\alpha} + \log_a x^{\beta} + \log_a y^{\gamma} = \alpha + m\beta + n\gamma.$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 1. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a. $A = \log_2 4\sqrt[3]{16} - 2\log_{\frac{1}{3}} 27\sqrt[3]{3} + \dfrac{4^{2+\log_2 3}}{3^{\log_9 2 - \log_{\frac{1}{3}} 5}}$.

☐ $10 + \dfrac{144}{5\sqrt{2}}$.   ☐ $1 + \dfrac{14}{3\sqrt{3}}$.

☐ $10 - \dfrac{144}{5\sqrt{2}}$.   ☐ $1 - \dfrac{14}{3\sqrt{3}}$.

b. $B = 15\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2\sqrt[5]{8}} + \dfrac{81^{\log_3 5}}{27^{\log_9 36} + 3^{\log_9 2401}}$.

☐ 28.   ☐ $\dfrac{125}{53}$.   ☐ $-\dfrac{16}{35}$.   ☐ $\dfrac{1609}{53}$.

Bài tập 2. Cho $m = \log_2 3$ và $n = \log_2 5$. Tính theo m, n giá trị của các biểu thức:

a. $A = \log_2 \sqrt[6]{135}$.

☐ $\frac{n}{6} + \frac{m}{2}$. ☐ $\frac{m}{6} + \frac{n}{2}$. ☐ $\frac{n + m}{6}$. ☐ $\frac{n + m}{2}$.

b. $B = \log_{30} \frac{3}{10}$.

☐ $\frac{m + n - 1}{m + n + 1}$. ☐ $\frac{m - n}{m + n}$.

☐ $\frac{m - n - 1}{m + n + 1}$. ☐ $\frac{m - n}{m + n + 1}$.

Bài tập 3. Cho $m = \log_a c$ và $n = \log_b c$. Tính theo m, n giá trị của $\log_{ab} c$.

☐ $\frac{m}{m + n}$. ☐ $\frac{m}{m + n}$. ☐ $\frac{mn}{m + n}$. ☐ $\frac{m - n}{m + n}$.

Bài tập 4. Tìm cơ số a, biết:

a. $\log_a 8 = 2$.

☐ 4. ☐ 16. ☐ 64. ☐ $2\sqrt{2}$.

b. $\log_a \frac{27}{\sqrt[5]{9}} = -\frac{26}{5}$.

☐ $\sqrt{3}$. ☐ $\frac{1}{\sqrt{3}}$. ☐ $\frac{1}{3}$. ☐ $\sqrt{3}$.

Bài tập 5. Xác định a, b sao cho $\log_2 a + \log_2 b = \log_2(a + b)$.

☐ $a + b = ab$, với $a.b > 0$. ☐ $a + b = 2ab$, với $a, b > 0$.

☐ $a + b = ab$, với $a, b > 0$. ☐ $2(a + b) = ab$, với $a, b > 0$.

Bài toán 2: Sử dụng công thức đổi cơ số.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng các kết quả trong mục 1.3.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 6. Cho $0 < x_1, x_2, ..., x_n \neq 1$. Chứng minh rằng:

$$\log_{x_1} x_2 . \log_{x_2} x_3 ... \log_{x_{n-1}} x_n . \log_{x_n} x_1 = 1.$$

Bài tập 7. Cho $0 < x_1, x_2, ..., x_n, a, x_1.x_2...x_n \neq 1$. Chứng minh rằng:

$$\log_{x_1.x_2...x_n} a = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\log_{x_i} a}}.$$

Bài tập 8. Chứng minh rằng với $x^2 + 4y^2 = 12xy$, $x, y > 0$ ta luôn có

$$\ln(x + 2y) - 2\ln 2 = \frac{1}{2}(\ln x + \ln y).$$

Bài tập 9. Cho $y = a^{\frac{1}{1-\log_a x}}$, $z = a^{\frac{1}{1-\log_a y}}$. Chứng minh rằng $x = a^{\frac{1}{1-\log_a z}}$.

Bài tập 10. Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbf{N}$, $n > 2$ luôn có $n > \log_2(2n + 1)$.

Bài tập 11. Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbf{N}$ luôn $\exists k \in \mathbf{N}$, $k > 1$ sao cho:

$$\log_k(13^n - 1) = 1 + \log_k 6.$$

Bài tập 12. Chứng minh rằng với với $0 < a, b, c, abc \neq 1$ luôn có:

$$\log_a d.\log_b d + \log_b d.\log_c d + \log_c d.\ \log_a d = \frac{\log_a d.\log_b d.\log_c d}{\log_{abc} d}.$$

Bài tập 13. Chứng minh rằng với $a^2 + b^2 = c^2$, $a, b, c > 0$, $c \pm b \neq 1$ ta luôn có:

$$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2\log_{c+b} a.\log_{c-b} a.$$

Bài tập 14. Chứng minh rằng với $\log_x a$, $\log_y b$, $\log_z c$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng ta luôn có:

$$\log_b y = \frac{2\log_a x.\log_c z}{\log_a x + \log_c z},\ 0 < a, b, c, x, y, z \neq 1.$$

Bài tập 15. Chứng minh rằng với $0 < N \neq 1$ và a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số nhân ta luôn có:

$$\frac{\log_a N}{\log_c N} = \frac{\log_a N - \log_b N}{\log_b N - \log_c N},\ 0 < a, b, c \neq 1.$$

Bài toán 3: So sánh các số có dạng logarit.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng các kết quả:

1. Với $a > 1$ thì $\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$.
2. Với $0 < a < 1$ thì $\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 16. So sánh các số a và b, biết:

a. $a = \log_3 4$ và $b = \log_4 \frac{1}{3}$.

☐ a > b. ☐ a < b. ☐ a = b.

b. $a = \log_{\frac{2}{3}} \frac{3}{5}$ và $b = \log_{\frac{3}{5}} \frac{3}{2}$.

☐ a > b. ☐ a < b. ☐ a = b.

c. $a = 2^{\log_6 3}$ và $b = 3^{\log_6 \frac{1}{2}}$.

☐ a > b. ☐ a < b. ☐ a = b.

Bài tập 17. Nhận xét gì về cơ số a, biết:

a. $\log_a(x^2 + 1) > \log_a(x + 1)$.

b. $\log_a(x^2 - 1) > \log_a(4x - 4)$.

Bài tập 18. Chứng minh rằng $\log_n(n + 1) > \log_{n+1}(n + 2)$, với mọi số nguyên $n > 1$.

Bài tập 19. Cho $y = 2^{x^2}$ và $z = 2^{y^2}$. Chứng minh rằng $x^2 = \frac{1}{2}\log_2(\log_2 z)$.

Bài toán 4: Tìm tập xác định của hàm số có chứa logarit.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Xét hàm số $y = \log_{f_1(x)}[f_2(x)]$.

Để tìm tập xác định D của hàm số ta đi giải điều kiện:

$$\begin{cases} f_1(x) \text{ có nghĩa và } 0 < f_1(x) \neq 1 \\ f_2(x) \text{ có nghĩa và } f_2(x) > 0 \end{cases}.$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 20. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \log_2(x - 1)^2$.

☐ **R**. ☐ **R**\{1}. ☐ $(1; +\infty)$. ☐ $(-\infty; 1)$.

b. $y = \log_4|x + 2|$.

☐ **R**. ☐ **R**\{−2}. ☐ $(-2; +\infty)$. ☐ $(-\infty; -2)$.

c. $y = \sqrt{x^2 + x - 2}\,\log_3(9 - x^2)$.

☐ $(-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$. ☐ $(-3; 3)$.

☐ $[-2; 1]$. ☐ $(-3; -2] \cup [1; 3)$.

Bài tập 21. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \dfrac{1}{\log_3 x - 1}$.

☐ $(0; +\infty)$. ☐ $(0; +\infty)\backslash\{3\}$. ☐ **R**\{3}. ☐ **R**.

b. $\log_3\dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 - x - 2}}$.

☐ $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$. ☐ $(2; +\infty)$.

☐ $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$. ☐ $(-\infty; -1)$.

c. $y = \log_2[4|2x - 1|(x^2 - x + 1) - x^3 + 6x^2 - 15x + 14]$

☐ $[\frac{1}{2}; +\infty)$. ☐ $(-\infty; \frac{1}{2}]$ ☐ **R**\{$\frac{1}{2}$}. ☐ **R**.

d. $y = \log_2[x - \sqrt{x^2 - |x|}]$

☐ $(0; +\infty)$. ☐ $[1; +\infty)$. ☐ $(-\infty; -1)$. ☐ $\mathbf{R}\backslash\{0\}$.

Bài tập 22. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \log_2[\sqrt{2 - |\log_2 x|} - \log_2 x]$

☐ $[\frac{1}{4}; 2)$. ☐ $(0; +\infty)$. ☐ $(2; +\infty)$. ☐ $(0; 2)$.

b. $y = \lg[\cos(\lg x)]$.

☐ $(0; +\infty)$.

☐ $(10^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}; 10^{\frac{\pi}{2}+2k\pi})$, với $k \in \mathbf{Z}$.

☐ $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, với $k \in \mathbf{Z}$.

☐ $(-10; 10)$.

c. $y = \lg(1 - 2\cos x)$.

☐ $(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$. ☐ $(\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$.

☐ $(\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{5\pi}{3} + 2k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$. ☐ $(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; \frac{11\pi}{6} + 2k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 23. Cho hàm số:

$$y = \frac{\sqrt{(m+1)x - m}}{\log_a(mx - m + 2)}, \text{ với } 0 < a \neq 1.$$

a. Tìm miền xác định của hàm số khi $m = -\frac{1}{2}$.

☐ $[-1; 3)$. ☐ $[-1; 5)$.

☐ $(3; 5)$. ☐ $[-1; 3) \cup (3; 5)$.

b. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số xác định với mọi $x \geq 1$.

☐ $m \geq 0$. ☐ $m \geq 2$ ☐ $m < 0$. ☐ $m < 2$

Bài toán 5: Tìm giới hạn của hàm số logarit.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Chúng ta sử dụng giới hạn dạng:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1.$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 24. Tính các giới hạn sau:

a. $L = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(ax+1)}{x}$, với $a \neq 0$.

☐ 1. ☐ a. ☐ a + 1. ☐ a − 1.

b. $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$.

☐ $\dfrac{1}{2}$. ☐ $-\dfrac{1}{2}$. ☐ 1. ☐ −1.

Bài tập 25. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-2x^2} - \sqrt[3]{1 + x^2}}{\ln(1 + x^2)}$.

☐ $\dfrac{1}{3}$. ☐ $-\dfrac{2}{3}$. ☐ $\dfrac{5}{3}$. ☐ $-\dfrac{7}{3}$.

Bài toán 6: Xét tính liên tục của hàm số logarit tại điểm x_0.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Khẳng định rằng hàm số xác định tại điểm x_0, tính $f(x_0)$.

Bước 2: Xác định $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Bước 3: Kiểm nghiệm $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Bước 4: Kết luận.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 26. Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm $x_0 = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1 + 3x)}{\sin 2x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}.$$

☐ Liên tục tại x_0. ☐ Không liên tục tại x_0.

Bài tập 27. Xác định a để hàm số liên tục trên $(0, +\infty)$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x - 1}{x - e} & \text{khi } 0 < x \neq e \\ a & \text{khi } x = e \end{cases}.$$

☐ $a = \dfrac{1}{e}$. ☐ $a = -\dfrac{1}{e}$. ☐ $a = -e$. ☐ $a = e$.

III. HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Ta lần lượt có:

$$\log_2 4\sqrt[3]{16} = \log_2(2^2.2^{\frac{4}{3}}) = \log_2 2^{\frac{10}{3}} = \frac{10}{3},$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 27\sqrt[3]{3} = \log_{\frac{1}{3}}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}.\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}\right] = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{10}{3}} = -\frac{10}{3},$$

$$4^{2+\log_2 3} = 4^2.4^{\log_2 3} = 16.2^{2\log_2 3} = 16.2^{\log_2 9} = 16.9 = 144,$$

$$3^{\log_9 2-\log_{\frac{1}{3}} 5} = \frac{3^{\log_9 2}}{3^{\log_{\frac{1}{3}} 5}} = \frac{3^{\frac{1}{2}\log_3 2}}{3^{-\log_3 5}} = \frac{3^{\log_3 \sqrt{2}}}{3^{\log_3 \frac{1}{5}}} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{5}} = 5\sqrt{2}.$$

Suy ra:

$$A = \frac{10}{3} - 2\left(-\frac{10}{3}\right) + \frac{144}{5\sqrt{2}} = 10 + \frac{144}{5\sqrt{2}}.$$

b. Ta lần lượt có:

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\sqrt[3]{4}}{2\sqrt[5]{8}} = \log_{2^{-\frac{1}{2}}} \frac{2^{\frac{2}{3}}}{2.2^{\frac{3}{5}}} = -2\log_2 2^{\frac{2}{3}-1-\frac{3}{5}} = -2.\left(-\frac{14}{15}\right) = \frac{28}{15},$$

$$\frac{81^{\log_3 5}}{27^{\log_9 36}+3^{\log_9 2401}} = \frac{3^{4\log_3 5}}{3^{3\log_{3^2} 36}+3^{\log_{3^2} 2401}} = \frac{3^{\log_3 5^4}}{3^{\log_3 36^{\frac{3}{2}}}+3^{\log_3 \sqrt{2401}}}$$

$$= \frac{5^4}{36^{\frac{3}{2}}+\sqrt{2401}} = \frac{625}{216+49} = \frac{125}{53},$$

Suy ra:

$$B = 15.\frac{28}{15} + \frac{125}{53} = \frac{1609}{53}.$$

Bài tập 2.

a. Ta có:

$$A = \log_2\sqrt[6]{5.3^3} = \log_2 5^{\frac{1}{6}} + \log_2 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}\log_2 5 + \frac{1}{2}\log_2 3 = \frac{n}{6} + \frac{m}{2}.$$

b. Ta có:

$$B = \frac{\log_2 \frac{3}{10}}{\log_2 30} = \frac{\log_2 3 - \log_2 10}{\log_2 30} = \frac{\log_2 3 - \log_2(2.5)}{\log_2(2.3.5)}$$

$$= \frac{\log_2 3 - 1 - \log_2 5}{1+\log_2 3+\log_2 5} = \frac{m-n-1}{m+n+1}.$$

Bài tập 3. Ta có:

$$\log_{ab}c = \frac{1}{\log_c(ab)} = \frac{1}{\log_c a+\log_c b} = \frac{1}{\frac{1}{\log_a c}+\frac{1}{\log_b c}} = \frac{1}{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{mn}{m+n}.$$

Bài tập 4.

a. Ta viết lại:

$$\log_a 8 = \log_{\sqrt{8}} 8 \Rightarrow a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

b. Ta viết lại:

$$-\frac{26}{5} = \log_a \frac{3^3}{3^{\frac{2}{5}}} = \log_a 3^{\frac{13}{5}} = \frac{13}{5}\log_a 3 \Leftrightarrow \log_a 3 = -2 = \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 3$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Bài tập 5. Ta có ngay điều kiện a, b > 0 và:

$$\log_2(a + b) = \log_2(ab) \Leftrightarrow a + b = ab.$$

Vậy, cần có a + b = ab, với a, b > 0.

Bài tập 6. Ta có:

$$VT = \underbrace{\log_{x_1} x_2 . \log_{x_2} x_3}_{} . \log_{x_3} x_4 \ldots \log_{x_{n-1}} x_n . \log_{x_n} x_1$$

$$= \underbrace{\log_{x_1} x_3 . \quad \log_{x_3} x_4}_{} \ldots \log_{x_{n-1}} x_n . \log_{x_n} x_1$$

$$= \log_{x_1} x_4 . \quad \ldots \log_{x_{n-1}} x_n . \log_{x_n} x_1$$

$$= \ldots$$

$$= \log_{x_1} x_1 = 1, \text{ dpcm.}$$

Bài tập 7. Ta có:

$$VP = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \log_a x_i} = \frac{1}{\log_a\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)} = \log_{\prod_{i=1}^{n} x_i} a = \log_{x_1 . x_2 \ldots x_n} a, \text{ dpcm.}$$

Bài tập 8. Từ giả thiết ta được:

$$x^2 + 4xy + 4y^2 = 16xy \Leftrightarrow (x + 2y)^2 = 16xy \Leftrightarrow \ln(x + 2y)^2 = \ln(16xy)$$

$$\Leftrightarrow 2\ln|x + 2y| = \ln 16 + \ln x + \ln y$$

$$\Leftrightarrow \ln(x + 2y) - 2\ln 2 = \frac{1}{2}(\ln x + \ln y), \text{ dpcm.}$$

Bài tập 9. Từ giả thiết:

$$y = a^{\frac{1}{1-\log_a x}} \Rightarrow \log_a y = \frac{1}{1-\log_a x} \Leftrightarrow \log_a x = 1 - \frac{1}{\log_a y},$$

$$z = a^{\frac{1}{1-\log_a y}} \Rightarrow \log_a z = \frac{1}{1-\log_a y}.$$

Suy ra:

$$1 - \log_a z = 1 - \frac{1}{1 - \log_a y} = \frac{-\log_a y}{1 - \log_a y} = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{\log_a y}} = \frac{1}{\log_a x}$$

$$\Leftrightarrow \log_a x = \frac{1}{1 - \log_a z} \Leftrightarrow x = a^{\frac{1}{1-\log_a z}}, \text{ đpcm.}$$

Bài tập 10. *Chứng minh bằng phương pháp quy nạp.*

Bài tập 11. *Chứng minh bằng phương pháp quy nạp.*

Bài tập 12. Ta có:

$$\begin{aligned} VP &= \log_a d.\log_b d.\log_c d.\log_d(abc) \\ &= \log_a d.\log_b d.\log_c d.(\log_d a + \log_d b + \log_d c) \\ &= \log_b d.\log_c d + \log_c d.\ \log_a d + \log_a d.\log_b d, \text{ đpcm.} \end{aligned}$$

Bài tập 13. Ta có:

$$a^a + b^2 = c^2 \Leftrightarrow a^a = c^2 - b^2 = (c-b)(c+b).$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_{c+b} a^2 = \log_{c+b}(c-b)(c+b) \\ \log_{c-b} a^2 = \log_{c-b}(c-b)(c+b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\log_{c+b} a = \log_{c+b}(c-b) + 1 \\ 2\log_{c-b} a = 1 + \log_{c-b}(c+b) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 4\log_{c+b}a.\log_{c-b}a &= [\log_{c+b}(c-b) + 1].[1 + \log_{c-b}(c+b)] \\ &= \log_{c+b}(c-b) + \log_{c-b}(c+b) + \log_{c+b}(c-b).\log_{c-b}(c+b) + 1 \\ &= 2\log_{c+b}a - 1 + 2\log_{c-b}a - 1 + 1 + 1 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2\log_{c+b}a.\log_{c-b}a = \log_{c+b}a + \log_{c-b}a, \text{ đpcm.}$$

Bài tập 14. Với $\log_x a$, $\log_y b$, $\log_z c$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng ta luôn có:

$$2\log_y b = \log_x a + \log_z c \Leftrightarrow \frac{2}{\log_b y} = \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_c z} = \frac{\log_a x + \log_c z}{\log_a x.\log_c z}$$

$$\Leftrightarrow \log_b y = \frac{2\log_a x.\log_c z}{\log_a x + \log_c z}, \text{ đpcm.}$$

Bài tập 15. Với a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số nhân ta luôn có:

$$b^2 = a.c \Leftrightarrow \log_N b^2 = \log_N(a.c) \Leftrightarrow \log_N b - \log_N a = \log_N c - \log_N b$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_b N} - \frac{1}{\log_a N} = \frac{1}{\log_c N} - \frac{1}{\log_b N}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_a N - \log_b N}{\log_a N.\log_b N} = \frac{\log_b N - \log_c N}{\log_b N.\log_c N} \Leftrightarrow \frac{\log_a N}{\log_c N} = \frac{\log_a N - \log_b N}{\log_b N - \log_c N}.$$

Bài tập 16.

a. $a > b$. b. $a > b$. c. $a > b$.

Bài tập 17.

a. Ta đi biến đổi:

$$\log_a(x^2+1) > \log_a(x+1)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1\\x^2+1>x+1>0\end{cases}\\\begin{cases}0<a<1\\x^2+1<x+1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1\\x>1 \text{ hoặc } -1<x<0\end{cases}\\\begin{cases}0<a<1\\0<x<1\end{cases}\end{array}\right.$$

b. Ta đi biến đổi:

$$\log_a(x^2-1) > \log_a(4x-4)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1\\x^2-1>4x-4>0\end{cases}\\\begin{cases}0<a<1\\0<x^2-1<4x-4\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1\\x>3\end{cases}\\\begin{cases}0<a<1\\1<x<3\end{cases}\end{array}\right.$$

Bài tập 18. Ta có:

$$A = \log_n(n+1) = \log_n n\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 + \log_n\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

$$B = \log_{n+1}(n+2) = \log_{n+1}(n+1)\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = 1 + \log_{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

Nhận xét rằng:

$$1+\frac{1}{n} > 1+\frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \log_n\left(1+\frac{1}{n}\right) > \log_n\left(1+\frac{1}{n+1}\right) > \log_{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \Leftrightarrow A > B.$$

Bài tập 19. Từ giả thiết $y = 2^{x^2}$ và $z = 2^{y^2}$ suy ra:

$$\log_2 y = x^2 \text{ và } \log_2 z = y^2$$

Suy ra:

$$2x^2 = 2\log_2 y = \log_2 y^2 = \log_2(\log_2 z) \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2}\log_2(\log_2 z), \text{ đpcm.}$$

Bài tập 20.

a. Hàm số xác định khi:

$$(x-1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 1.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là **R**\{1}.

b. Hàm số xác định khi:

$$|x+2| > 0 \Leftrightarrow x \neq -2.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là **R**\{−2}.

c. Hàm số xác định khi:

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 + x - 2 \ge 0 \\ 9 - x^2 > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x \ge 1 \\ x \le -2 \end{array}\right. \\ |\,x\,| < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \le x < 3 \\ -3 < x \le -2 \end{array}\right.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $(-3; -2] \cup [1; 3)$.

Bài tập 21.

a. Hàm số xác định khi:

$$\left\{\begin{array}{l} x > 0 \\ \log_3 x - 1 \ne 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x > 0 \\ \log_3 x \ne 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow 0 < x \ne 3.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $(0; +\infty)\backslash\{3\}$.

b. Hàm số xác định khi:

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 - x - 2 > 0 \\ \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2 - x - 2}} > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x > 2 \text{ hoặc } x < -1 \\ x + 1 > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x > 2.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $(2; +\infty)$.

c. Hàm số xác định khi:

$$4|2x - 1|(x^2 - x + 1) - x^3 + 6x^2 - 15x + 14 > 0. \qquad (*)$$

Xét hai trường hợp:

- Với $2x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \dfrac{1}{2}$ thì bất phương trình (*) có dạng:

$$4(2x - 1)(x^2 - x + 1) - x^3 + 6x^2 - 15x + 14 > 0$$
$$\Leftrightarrow 7x^3 - 6x^2 - 3x + 10 > 0 \Leftrightarrow (x + 1)(7x^2 - 13x + 10) > 0 \text{ đúng.}$$

- Với $2x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{2}$ thì bất phương trình (*) có dạng:

$$-4(2x - 1)(x^2 - x + 1) - x^3 + 6x^2 - 15x + 14 > 0$$
$$\Leftrightarrow -9x^3 + 18x^2 - 27x + 18 > 0 \Leftrightarrow (x - 1)(9x^2 + x + 18) < 0 \Leftrightarrow x < 1.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là **R**.

d. Hàm số xác định khi:

$$x - \sqrt{x^2 - |\,x\,|} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - |\,x\,|} < x \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x > 0 \\ 0 \le x^2 - |\,x\,| < x^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \ge 1.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $[1, +\infty)$.

Bài tập 22.

a. Hàm số xác định trước hết cần có $x > 0$ và:

$$\sqrt{2 - |\log_2 x|} - \log_2 x > 0.$$

Đặt $t=\log_2 x$. Khi đó, biến đổi tương đương bất phương trình về dạng:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2-|t|}>t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} t<0 \\ 2-|t|\geq 0\end{cases} \\ \begin{cases} t\geq 0 \\ 2-|t|>t^2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} t<0 \\ 2+t>0\end{cases} \\ \begin{cases} t\geq 0 \\ t^2+t-2<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2<t<0 \\ 0\leq t<1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow -2\leq t<1 \Leftrightarrow -2\leq \log_2 x<1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\leq x<2.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $[\frac{1}{4}; 2)$.

b. Hàm số xác định khi:

$$\cos(\lg x)>0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}+2k\pi<\lg x<\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

$$\Leftrightarrow 10^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}<x<10^{\frac{\pi}{2}+2k\pi}, \text{ với } k\in \mathbf{Z}.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $(10^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}; 10^{\frac{\pi}{2}+2k\pi})$, với $k\in \mathbf{Z}$.

c. Hàm số xác định khi:

$$1-2\cos x>0 \Leftrightarrow \cos x<\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{5\pi}{3}+2k\pi, \text{ với } k\in \mathbf{Z}.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $(\frac{\pi}{3}+2k\pi; \frac{5\pi}{3}+2k\pi)$, với $k\in \mathbf{Z}$.

Bài tập 23. Hàm số nghĩa khi:

$$\begin{cases}(m+1)x-m\geq 0 \\ mx-m+2>0 \\ \log_a(mx-m+2)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(m+1)x-m\geq 0 & (1) \\ mx-m+2>0 & (2). \\ mx-m+2\neq 1 & (3)\end{cases}$$

a. Với $m=-\frac{1}{2}$ hàm số có nghĩa khi:

$$\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\geq 0 \\ -\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}>0 \\ \log_a(-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2})\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x<5 \\ -\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x<5 \\ x\neq 3\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1\leq x<3 \\ 3<x<5\end{array}\right..$$

Vậy, với $m=-\frac{1}{2}$ ta được $D=[-1; 3)\cup(3; 5)$.

b. Hàm số xác định với mọi $x\geq 1$ khi (1), (2) và (3) đồng thời thoả mãn với mọi $x\geq 1$.

Ta có:

- $g(x) = (m+1)x - m \geq 0\ \forall x \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \geq 0 \\ g(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq -1.$
- $h(x) = mx - m + 2 > 0\ \forall x \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ h(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 0.$
- Do đó (1), (2) đồng thời thoả mãn với $\forall x \geq 1$ khi $m \geq 0$, khi đó
$$q(x) = mx - m + 2 = m(x-1) + 2 \geq 2 \Rightarrow (3) \text{ đúng.}$$

Vậy, với $m \geq 0$ hàm số xác định với mọi $x \geq 1$.

Bài tập 24.

a. Ta có:

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(ax+1)}{ax}.a = a.$$

b. Ta có:

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\ln[1 + (\cos x - 1)]}{\cos x - 1}.\frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{4.\left(\frac{x}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2}.$$

Bài tập 25. $L = -\frac{7}{3}$.

Bài tập 26. Hàm số xác định tại điểm $x_0 = 0$ và $f(0) = 1$.

Ta có:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sin 2x} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{3}{2}.\frac{\ln(1+3x)}{3x}.\frac{2x}{\sin 2x}\right] = \frac{3}{2}.$$

Vậy $f(0) \neq \lim\limits_{x \to 0} f(x)$, do đó hàm số gián đoạn tại điểm $x_0 = 0$.

Bài tập 27. Để hàm số liên tục trên $(0, +\infty)$ điều kiện cần và đủ là nó liên tục tại điểm $x_0 = e$.

Hàm số xác định tại điểm $x_0 = e$ và $f(e) = a$.

Ta có:

$$\lim_{x \to e} f(x) = \lim_{x \to e} \frac{\ln x - 1}{x - e} = \frac{1}{e}.$$

Vậy, để hàm số liên tục trên $(0, +\infty)$ điều kiện là $a = \frac{1}{e}$.

CHƯƠNG V

PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ MŨ

CHỦ ĐỀ 1

PHƯƠNG TRÌNH MŨ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa: Phương trình mũ là phương trình chứa ẩn ở số mũ của luỹ thừa.

II. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ BÀI TẬP

Bài toán 1: Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương .

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta sử dụng phép biến đổi tương đương sau:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \end{array}\right. \text{ hoặc } \begin{cases} a > 0 \\ (a-1)[f(x) - g(x)] = 0 \end{cases}.$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 1: Giải các phương trình:

a. $2^{2x^2-5x-1} = \frac{1}{8}$.

☐ $x = 1, x = 3$. ☐ $x = -1, x = -3$.

☐ $x = 2, x = \frac{1}{2}$. ☐ $x = -2, x = -\frac{1}{2}$.

b. $16^{\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}} = 0,25.\ 2^{\frac{3x+7}{x^2-4}}$.

☐ $x = 0, x = 2$. ☐ $x = -2, x = 11$.

☐ $x = 1, x = \frac{1}{2}$. ☐ $x = -1, x = -\frac{3}{2}$.

c. $32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0,25.\ 128^{\frac{x+17}{x-3}}$.

☐ $x = -1$. ☐ $x = 6$. ☐ $x = -8$. ☐ $x = 10$

Bài tập 2: Giải các phương trình:

a. $(x+2)^{\sqrt{x-3}} = 1$.

☐ $x = -1$. ☐ $x = 3$. ☐ $x = 4$. ☐ $x = 0$.

b. $\sqrt[4]{x^x} = x^{\sqrt[4]{x}}$.

☐ $x = 0, x = 1$.

☐ $x = 2, x = 4\sqrt[3]{4}$.

☐ $x = 1, x = 4\sqrt[3]{4}$.

☐ $x = 2, x = 16$.

c. $x^{\frac{2\sqrt{x-1}-3}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}}} = x$.

☐ $x = 1, 2 \le x \le 5$.

☐ $1 \le x \le 5$.

☐ $x = 1, x = 2, x = 5$.

☐ $x = 1, 2 \le x < \frac{13}{4}, \frac{13}{4} < x \le 5$.

Bài tập 3: Giải các phương trình:

a. $(x-2)^{2x^2-3x+2} = (x-2)^{x^2+3x-6}$.

☐ $x = 1, x = 2$.

☐ $x = 1, x = 4$.

☐ $x = 3, x = 4$.

☐ $x = 2, x = 3$.

b. $(x-3)^{3x^2-5x+2} = (x^2-6x+9)^{x^2+x-4}$.

☐ $x = 3, x = 4$.

☐ $x = 5, x = 1$.

☐ $x = 4, x = 5$.

☐ $x = 1, x = 11$.

c. $(3+2x-x^2)^{\sqrt{3}\sin x} = (3+2x-x^2)^{1-\cos x}$.

☐ $-1 < x < 3$.

☐ $x = 1 \pm \sqrt{2}, x = 2k\pi$.

☐ $x = 1 \pm \sqrt{3}, x = 0, x = \frac{2\pi}{3}$.

☐ $x = \pm 1, x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

d. $(2+x-x^2)^{\sin x} = (2+x-x^2)^{2-\sqrt{3}\cos x}$.

☐ $-1 < x < 2$.

☐ $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ và $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$.

☐ $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ và $x = \frac{\pi}{6}$.

☐ $x = 0, x = \pm 1$.

Bài tập 4: Cho phương trình:

$$3^{x^2-4x+5} = 9^m.$$

a. Giải phương trình với m = 1.

☐ $x = 1, x = 3$.

☐ $x = 2, x = 5$.

☐ $x = -2, x = -1$.

☐ $x = 0, x = 8$.

b. Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

☐ $m > \frac{5}{2}$. ☐ $m < \frac{3}{2}$. ☐ $m > 1$. ☐ $m > 6$.

Bài tập 5: Giải và biện luận phương trình:

$$(x^2+1)^{1+\sqrt{x+2}} = (x^2+1)^{a-\sqrt{x+2}}.$$

Bài tập 6: Giải và biện luận phương trình:

$$(x-m)^{2x^2-2mx+1} = (x^2-2mx+m^2)^{x^2+x-1}.$$

Bài toán 2: Phương pháp logarit hoá và đưa về cùng cơ số .

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để chuyển ẩn số khỏi số mũ luỹ thừa người ta có thể logarit theo cùng một cơ số cả hai vế của phương trình, ta có các dạng:

Dạng 1: Phương trình:

$$a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1, b > 0 \\ f(x) = \log_a b \end{cases}.$$

Dạng 2: Phương trình:

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).\log_a b$$

$$\text{hoặc } \log_b a^{f(x)} = \log_b b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x).\log_b a = g(x).$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 7: Giải các phương trình:

a. $2^{x^2} = 3^{x-1}$.

☐ $x = 1$. ☐ $x = 2$. ☐ $x = 4$. ☐ Vô nghiệm.

b. $8^{\frac{x}{x+2}} = 4.3^{4-x}$.

☐ $x = -2, x = 0$. ☐ $x = 2, x = \log_2 3$.

☐ $x = 4, x = -\log_3 18$. ☐ $x = \log_2 5, x = \log_3 4$.

c. $3^{x-2}.5^{x-1}.7^x = 245$.

☐ $x = 0$. ☐ $x = 1$. ☐ $x = 2$. ☐ $x = 4$.

d. $2^x.3^{x-1}.5^{x-2} = 12$.

☐ $x = 0$. ☐ $x = 1$. ☐ $x = 2$. ☐ $x = 4$.

Bài tập 8: Giải các phương trình:

a. $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+3} = 3^x + 3^{x+3} - 3^{x+1}$.

☐ $x = 0$. ☐ $x = -1$. ☐ $x = -3$. ☐ $x = \log_{\frac{5}{3}} \frac{131}{25}$.

b. $2^{\frac{1}{x}}(\sqrt{x^2+4} - x - 2) = 4\sqrt{x^2+4} - 4x - 8$.

☐ $x = \frac{1}{2}$. ☐ $x = -\frac{3}{2}$. ☐ $x = 1$. ☐ $x = 4$.

Bài toán 3: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 1.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Phương pháp dùng ẩn phụ dạng 1 là việc sử dụng một ẩn phụ để chuyển phương trình ban đầu thành một phương trình với một ẩn phụ.

Ta lưu ý các phép đặt ẩn phụ thường gặp sau:

Dạng 1: Phương trình $\alpha_k a^{kx} + \alpha_{k-1}a^{(k-1)x} + \ldots + \alpha_1 a^x + \alpha_0 = 0$,
khi đó đặt $t = a^x$, điều kiện $t > 0$, ta được:

$$\alpha_k t^k + \alpha_{k-1}t^{k-1} + \ldots + \alpha_1 t + \alpha_0 = 0.$$

Mở rộng: Nếu đặt $t = a^{f(x)}$, điều kiện hẹp $t > 0$. Khi đó:

$$a^{2f(x)} = t^2,\ a^{3f(x)} = t^3,\ \ldots,\ a^{kf(x)} = t^k \text{ và } a^{-f(x)} = \frac{1}{t}.$$

Dạng 2: Phương trình $\alpha_1 a^x + \alpha_2 b^x + \alpha_3 = 0$, với $a.b = 1$
khi đó đặt $t = a^x$, điều kiện $t > 0$, suy ra $b^x = \frac{1}{t}$, ta được:

$$\alpha_1 t + \frac{\alpha_2}{t} + \alpha_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 t^2 + \alpha_3 t + \alpha_2 = 0.$$

Mở rộng: Với $a.b = 1$ thì khi đặt $t = a^{f(x)}$, điều kiện hẹp $t > 0$, suy ra $b^{f(x)} = \frac{1}{t}$.

Dạng 3: Phương trình $\alpha_1 a^{2x} + \alpha_2(ab)^x + \alpha_3 b^{2x} = 0$,
khi đó chia hai vế của phương trình cho $b^{2x} > 0$ (hoặc a^{2x}, $(a.b)^x$), ta được:

$$\alpha_1\left(\frac{a}{b}\right)^{2x} + \alpha_2\left(\frac{a}{b}\right)^{x} + \alpha_3 = 0$$

Đặt $t = \left(\frac{a}{b}\right)^x$, điều kiện $t > 0$, ta được:

$$\alpha_1 t^2 + \alpha_2 t + \alpha_3 = 0.$$

Mở rộng: Với phương trình mũ có chứa các nhân tử: a^{2f}, b^{2f}, $(a.b)^f$, ta thực hiện theo các bước sau:

- Chia hai vế của phương trình cho $b^{2f} > 0$ (hoặc a^{2f}, $(a.b)^f$).
- Đặt $t = \left(\frac{a}{b}\right)^f$, điều kiện hẹp $t > 0$.

Dạng 4: Lượng giác hoá.

Chú ý: Ta sử dụng ngôn từ *điều kiện hẹp* $t > 0$ cho trường hợp đặt $t = a^{f(x)}$ vì:

- Nếu đặt $t = a^x$ thì $t > 0$ là điều kiện đúng.
- Nếu đặt $t = 2^{x^2+1}$ thì $t > 0$ chỉ là điều kiện hẹp, bởi thực chất điều kiện cho t phải là $t \geq 2$. Điều này đặc biệt quan trọng cho lớp các bài toán có chứa tham số.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 9: Giải các phương trình:

a. $25^x + 10^x = 2^{2x+1}$.

☐ $x = 0$. ☐ $x = 1$. ☐ $x = 2$. ☐ $x = 11$.

b. $6.9^x - 13.6^x + 6.4^x = 0$.

☐ $x = 0$. ☐ $x = \pm 1$. ☐ $x = \pm 2$. ☐ $x = 4$.

c. $4.3^x - 9.2^x = 5.6^{x/2}$.

☐ $x = 0$. ☐ $x = 1$. ☐ $x = 4$. ☐ $x = 8$.

d. $125^x + 50^x = 2^{3x+1}$.

☐ $x = 0$. ☐ $x = 1$. ☐ $x = 2$. ☐ $x = 3$.

e. $2^{2x} + 2^{3-2x} = 6$.

☐ $x = \pm\frac{1}{2}$. ☐ $x = \frac{1}{2}$ và $x = 1$.

☐ $x = -2$ và $x = 1$. ☐ $x = -2$ và $x = -1$.

f. $\frac{7^{2x}}{100^x} = 6.(0,7)^x + 7$.

☐ $x = \lg 7$. ☐ $x = \log_{0,7} 7$. ☐ $x = 10$. ☐ $x = \frac{1}{2}$.

g. $3^{\sqrt{x}} + 3^{1-\sqrt{x}} + 4 = 0$.

☐ $x = 0$. ☐ $x = 4$. ☐ $x = 9$. ☐ Vô nghiệm.

Bài tập 10: Giải các phương trình:

a. $4.3^{3x} - 3^{x+1} = \sqrt{1-9^x}$.

☐ $x = 0$. ☐ $x = -1$.

☐ $x = \log_3 \frac{2+\sqrt{2}}{2}$. ☐ $x = \log_3 \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

b. $2^{3x} - 6.2^x - \frac{1}{2^{3(x-1)}} + \frac{12}{2^x} = 1$.

☐ $x = 1$. ☐ $x = 2$. ☐ $x = 9$. ☐ Vô nghiệm.

c. $(\sqrt{7+4\sqrt{3}})^{\sin x} + (\sqrt{7-4\sqrt{3}})^{\sin x} = 4$.

☐ $x = 2k\pi$. ☐ $x = \pi + 2k\pi$. ☐ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. ☐ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

d. $(5 + \sqrt{24})^x + (5 - \sqrt{24})^x = 10$.

☐ $x = 0$. ☐ $x = \pm 1$. ☐ $x = \pm 2$. ☐ $x = \pm 4$.

e. $(2 + \sqrt{3})^x + (7 + 4\sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^x = 4(2 + \sqrt{3})$.

☐ $x = 0$ và $x = 1$. ☐ $x = \pm 1$.

☐ $x = -1$ và $x = 2$. ☐ $x = 0$ và $x = 2$.

Bài tập 11: Giải các phương trình:

a. $4^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 2 + \sqrt{2}$.

☐ $x = k\pi$. ☐ $x = \pi + 2k\pi$. ☐ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. ☐ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$.

b. $81^{\sin^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30$.

☐ $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ và $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. ☐ $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$.

☐ $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ và $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$. ☐ $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$.

c. $9^{\sin^2 x} + 9^{\cos^2 x} = 10$.

☐ $x = 2k\pi$. ☐ $x = k\pi$. ☐ $x = \frac{k\pi}{2}$. ☐ $x = \frac{k\pi}{4}$.

d. $4^{\cot g^2 x} + 2^{\sin^{-2} x} - 3 = 0$.

☐ $x = k\pi$. ☐ $x = \pi + 2k\pi$. ☐ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. ☐ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Bài tập 12: Giải và biện luận các phương trình:

a. $4.3^x - 3 + m = 3^{2x}$.

b. $m.3^x + m.3^{-x} = 8$.

c. $(m - 2).2^x + m.2^{-x} + m = 0$.

d. $(m - 2).2^x + (m - 5).2^{-x} - 2(m + 1) = 0$.

Bài tập 13: Xác định m để các phương trình sau có nghiệm:

a. $(m - 1).3^{2x} + 2(m - 3).3^x + m + 3 = 0$.

☐ $m \in (-\infty, -1) \cup (2, 4)$. ☐ $m \in (-1, 2) \cup (4, +\infty)$.

☐ $m \in (-3, \frac{3}{2}]\backslash\{1\}$. ☐ $m \in (-3, \frac{3}{2}]$.

b. $(m - 4).4^x - 2(m - 2).2^x + m - 1 = 0$.

☐ $m \geq 0$. ☐ $m < 0$. ☐ $m < 4$. ☐ $m \geq 4$.

Bài tập 14: Cho phương trình:

$$2^{2x+1} - 2^{x+3} - 2m = 0.$$

a. Giải phương trình với m = 32.

☐ $x = 0$. ☐ $x = 1$. ☐ $x = 2$. ☐ $x = 3$.

b. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

☐ $m < 0$. ☐ $m > -4$. ☐ $-4 < m < 0$. ☐ Vô nghiệm.

Bài tập 15: Cho phương trình:

$$m.16^x + 2.81^x = 5.36^x.$$

a. Giải phương trình với m = 3.

☐ $x = 0$ và $x = 2$. ☐ $x = 0$ và $x = 2$.

☐ $x = -1$ và $x = \frac{1}{2}$. ☐ $x = 0$ và $x = \frac{1}{2}$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất.

☐ $m = 0$ và $m = \frac{25}{8}$.   ☐ $m \leq 0$.

☐ $m = 0$ và $m = 25$.   ☐ $m \leq 0$ và $m = \frac{25}{8}$.

Bài tập 16: Cho phương trình:

$$4^x - m.2^{x+1} + 2m = 0.$$

a. Giải phương trình khi $m = 2$.

☐ $x = 0$.   ☐ $x = 1$.   ☐ $x = 2$.   ☐ $x = 3$.

b. Tìm m để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1 + x_2 = 3$.

☐ $m = 0$.   ☐ $m = 4$.   ☐ $m = 8$.   ☐ Vô nghiệm.

Bài tập 17: Cho phương trình:

$$(m - 2).2^{2(x^2+1)} - 2(m + 1).2^{x^2+1} + 2m - 6 = 0.$$

a. Giải phương trình với $m = 9$.

☐ $x = 0$.   ☐ $x = 1$.   ☐ $x = -1$.   ☐ $x = 8$.

b. Xác định m để phương trình có nghiệm.

☐ $2 \leq m \leq 9$.   ☐ $2 < m < 9$.   ☐ $2 \leq m < 9$.   ☐ $2 < m \leq 9$.

Bài tập 18: Cho phương trình:

$$(3 + 2\sqrt{2})^{tgx} + (3 - 2\sqrt{2})^{tgx} = m.$$

a. Giải phương trình với $m = 6$.

☐ $x = k\pi$.   ☐ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.   ☐ $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.   ☐ $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$.

b. Tìm m để phương trình có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

☐ $m > 2$.   ☐ $m < 2$.   ☐ $m \leq -2$.   ☐ $m \geq -2$.

Bài toán 4: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 2.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Phương pháp dùng ẩn phụ dạng 2 là việc sử dụng một ẩn phụ chuyển phương trình ban đầu thành một phương trình với một ẩn phụ nhưng các hệ số vẫn còn chứa x.

Phương pháp này thường được sử dụng đối với những phương trình khi lựa chọn ẩn phụ cho một biểu thức thì các biểu thức còn lại không biểu diễn được triệt để qua ẩn phụ đó hoặc nếu biểu diễn được thì công thức biểu diễn lại quá phức tạp.

Khi đó thường ta được một phương trình bậc hai theo ẩn phụ (hoặc vẫn theo ẩn x) có biệt số Δ là một số chính phương.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 19: Giải các phương trình sau:

a. $9^x + 2(x - 2)3^x + 2x - 5 = 0$.

☐ $x = 0$. ☐ $x = 1$. ☐ $x = 6$. ☐ Vô nghiệm.

b. $3^{2x} - (2^x + 9).3^x + 9.2^x = 0$.

☐ $x = 0$ và $x = -2$. ☐ $x = 1$ và $x = -2$.

☐ $x = 1$ và $x = 2$. ☐ $x = 0$ và $x = 2$.

c. $3^{2x} + \sqrt{3^x + 5} = 5$.

☐ $x = \log_3(\sqrt{5} - 1)$. ☐ $x = \log_3(\sqrt{5} + 1)$.

☐ $x = \log_3\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$. ☐ $x = \log_3\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$.

Bài tập 20: Cho phương trình:

$$3^{3x} + 2m.3^{2x} + m^2.3^x + m - 1 = 0.$$

a. Giải phương trình với $m = 1 + \sqrt{2}$.

☐ $x = 0$. ☐ $x = 4$. ☐ $x = 8$. ☐ Vô nghiệm.

b. Xác định m để phương trình có ba nghiệm phân biệt.

☐ $m > 1$. ☐ $1 < m < 3$. ☐ $m > 4$. ☐ $m < -3$.

Bài tập 21: Cho phương trình:

$$m^2.2^{3x} - 3m.2^{2x} + (m^2 + 2).2^x - m = 0, \text{ với } m \neq 0.$$

a. Giải phương trình với $m = 2$.

☐ $x = \log_2 3$. ☐ $x = -\log_2 3$. ☐ $x = \log_3 2$. ☐ $x = -\log_3 2$.

b. Xác định m để phương trình có ba nghiệm phân biệt.

☐ $0 < m < 1$. ☐ $-1 < m < 0$. ☐ $-1 < m < 1$. ☐ $m > 1$.

Bài toán 5: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 3.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Phương pháp dùng ẩn phụ dạng 3 sử dụng hai ẩn phụ cho hai biểu thức mũ trong phương trình và khéo léo biến đổi phương trình thành phương trình tích.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 22: Giải các phương trình sau:

a. $4^{x^2+x} + 2^{1-x^2} = 2^{(x+1)^2} + 1$.

☐ $x = 0$ và $x = \pm 2$. ☐ $x = -1$ và $x = \pm 8$.

☐ $x = 1$ và $x = \pm 3$. ☐ $x = 0$ và $x = \pm 1$.

b. $8.3^x + 3.2^x = 24 + 6^x$.

☐ $x = 0$ và $x = 1$. ☐ $x = 2$ và $x = 3$.

☐ $x = 1$ và $x = 2$. ☐ $x = 1$ và $x = 3$.

c. $4^{x^2-3x+2} + 4^{x^2+6x+5} = 4^{2x^2+3x+7} + 1$.

☐ $x = 1, x = 3$ và $x = 4$. ☐ $x = \pm 1, x = 2$ và $x = -5$.

☐ $x = 0, x = 2$ và $x = 6$. ☐ $x = 1, x = 2$ và $x = 5$.

Bài tập 23: Giải và biện luận các phương trình:

a. $9^{x^2-2x+m} - 3^{x^2+2m-3} = 3^{(x-2)^2-1} - 1$.

b. $4^{x^2+x+m} - 2^{x^2+2m-1} = 2^{(x+1)^2} - 1$.

Bài toán 6: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 4.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Phương pháp dùng ẩn phụ dạng 4 là việc sử dụng k ẩn phụ chuyển phương trình ban đầu thành một hệ phương trình với k ẩn phụ.

Trong hệ mới thì k – 1 phương trình nhận được từ các mối liên hệ giữa các đại lượng tương ứng.

Trường hợp đặc biệt là việc sử dụng 1 ẩn phụ chuyển phương trình ban đầu thành một hệ phương trình với 1 ẩn phụ và 1 ẩn x, khi đó Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện có nghĩa cho các biểu thức trong phương trình.

Bước 2: Biến đổi phương trình về dạng:

$$f[x, \varphi(x)] = 0$$

Bước 3: Đặt $y = \varphi(x)$, ta biến đổi phương trình thành hệ:

$$\begin{cases} y = \varphi(x) \\ f(x,y) = 0 \end{cases}.$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 24: Giải phương trình:

$$\frac{8}{2^{x-1}+1} + \frac{2^x}{2^x+2} = \frac{18}{2^{x-1}+2^{1-x}+2}.$$

☐ $x = 1$ và $x = 2$. ☐ $x = 3$ và $x = 4$.

☐ $x = 2$ và $x = 3$. ☐ $x = 1$ và $x = 4$.

Bài tập 25: Giải phương trình:

$$27^x + 2 = 3\sqrt[3]{3^{x+1} - 2}.$$

☐ $x = 0$. ☐ $x = -1$. ☐ $x = 2$. ☐ Vô nghiệm.

Bài toán 7: Sử dụng tính chất liên tục của hàm số.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho phương trình $f(x) = 0$, để chứng minh phương trình có k nghiệm phân biệt trong $[a, b]$, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chọn các số $a < T_1 < T_2 < \ldots < T_{k-1} < b$ chia đoạn $[a, b]$ thành k khoảng thoả mãn:

$$\begin{cases} f(a).f(T_1) < 0 \\ \ldots \\ f(T_{k-1}).f(b) < 0 \end{cases}.$$

Bước 2: Kết luận.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 26: Chứng minh rằng với mọi a, b phương trình sau luôn có ít nhất một nghiệm:

$$3^{3x} + a.3^{2x+b} + b.3^{x+a} - 1 = 0.$$

Bài tập 27: Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm với mọi m:

$$3^x - 4^{-x} = m.$$

Bài toán 8: Sử dung tính chất đơn điệu của hàm số.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng các tính chất của hàm số để giải phương trình là dạng toán khá quen thuộc. Ta có ba hướng áp dụng sau:

Hướng 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình về dạng:

$$f(x) = k. \qquad (1)$$

Bước 2: Xét hàm số $y = f(x)$

Dùng lập luận khẳng định hàm số đơn điệu (giả sử đồng biến).

Bước 3: Nhận xét:

- Với $x = x_0 \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) = k$, do đó $x = x_0$ là nghiệm
- Với $x > x_0 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0) = k$, do đó phương trình vô nghiệm
- Với $x < x_0 \Leftrightarrow f(x) < f(x_0) = k$, do đó phương trình vô nghiệm

Vậy $x = x_0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Hướng 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình về dạng:

$$f(x) = g(x). \qquad (2)$$

Bước 2: Xét hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$

Dùng lập luận khẳng định hàm số $y = f(x)$ là đồng biến còn hàm số $y = g(x)$ là hàm hằng hoặc nghịch biến.

Xác định x_0 sao cho $f(x_0) = g(x_0)$

Bước 3: Vậy phương trình có nghiệmduy nhất $x = x_0$.

Hướng 3: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình về dạng:

$$f(u) = f(v). \qquad (3)$$

Bước 2: Xét hàm số $y = f(x)$

Dùng lập luận khẳng định hàm số đơn điệu (giả sử đồng biến).

Bước 3: Khi đó:

$$(3) \Leftrightarrow u = v \text{ với } \forall u, v \in D_f.$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 28: Giải các phương trình:

a. $3^x + x - 4 = 0$.

☐ $x = 0$. ☐ $x = 1$. ☐ $x = 2$. ☐ Vô nghiệm.

b. $3^x + 4^x = 5^x$.

☐ $x = 0$. ☐ $x = -1$. ☐ $x = 2$. ☐ Vô nghiệm.

c. $15^{\frac{x}{2}} + 1 = 4^x$.

☐ $x = -1$. ☐ $x = 1$. ☐ $x = 2$. ☐ Vô nghiệm.

Bài tập 29: Giải các phương trình:

a. $3^{2x-3} + (3x - 10).3^{x-2} + 3 - x = 0$.

☐ $x = -1$ và $x = 2$. ☐ $x = -1$ và $x = -2$.

☐ $x = 1$ và $y = -2$. ☐ $x = 1$ và $x = 2$.

b. $3.4^x + (3x - 10).2^x + 3 - x = 0$.

☐ $x = 1$ và $x = -\log_2 3$. ☐ $x = 2$ và $x = -\log_3 2$.

☐ $x = 1$ và $x = \log_2 3$. ☐ $x = -2$ và $x = \log_3 2$.

c. $x^2 + (2^x - 3)x + 2(1 - 2^x) = 0$.

☐ $x = 0$ và $x = 1$. ☐ $x = 0$ và $x = 2$.

☐ $x = 1$ và $x = 2$. ☐ $x = 2$ và $x = 3$.

d. $2^{2x-1} + 3^{2x} + 5^{2x+1} = 2^x + 3^{x+1} + 5^{x+2}$.

☐ $x = -1$. ☐ $x = 0$. ☐ $x = 1$. ☐ Vô nghiệm.

e. $2^{3x} + 3x.2^{2x} + (1 + 3x^2).2^x + x^3 + x - 2 = 0.$

☐ $x = -1.$ ☐ $x = 0.$ ☐ $x = 1.$ ☐ Vô nghiệm.

f. $-2^{x^2-x} + 2^{x-1} = (x - 1)^2.$

☐ $x = 1.$ ☐ $x = 2.$ ☐ $x = 4.$ ☐ Vô nghiệm.

Bài tập 30: Giải phương trình:

a. $e^{|2x-5|} - e^{|x-1|} = \dfrac{1}{|2x-5|} - \dfrac{1}{|x-1|}.$

☐ $x = 1$ và $x = 2.$ ☐ $x = 3$ và $x = 4.$

☐ $x = 2$ và $x = 3.$ ☐ $x = 2$ và $x = 4.$

b. $\log_3(\sqrt{x^2-3x+2} + 2) + \left(\dfrac{1}{5}\right)^{3x-x^2-1} = 2.$

☐ $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$ ☐ $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{5}}{3}.$ ☐ $x = \pm 2.$ ☐ $x = \pm 1.$

Bài tập 31: Giải và biện luận phương trình:

$$2^{m^2x+6} - 2^{4x+3m} = (4 - m^2)x + 3m - 6.$$

Bài toán 9: Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Phương pháp điều kiện cần và đủ thường tỏ ra khá hiệu quả cho lớp dạng toán "*Tìm điều kiện tham số để:*

Dạng 1: *Phương trình có nghiệm duy nhất.*

Dạng 2: *Phương trình có nghiệm với mọi giá trị của một tham số.*

Dạng 3: *Phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in D$.*

Dạng 4: *Phương trình tương đương với một phương trình hoặc một bất phương trình khác.*

Khi đó, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện để các biểu thức của phương trình có nghĩa.

Bước 2: Tìm *điều kiện cần* cho hệ dựa trên việc đánh giá hoặc tính đối xứng của hệ.

Bước 3: Kiểm tra *điều kiện đủ*, trong bước này cần có được một số kỹ năng có bản.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 32: Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\frac{1}{3^{|x-2|}} = 2m - 1.$$

☐ $m = 0$. ☐ $m = 1$. ☐ $m = 2$. ☐ Vô nghiệm.

Bài tập 33: Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$2^{mx(2-x)} = 3^{|x-1|} + m.$$

☐ $m = -1$ và $m = 0$. ☐ $m = 0$ và $m = 1$.

☐ $m = 1$ và $m = 4$. ☐ $m = -1$ và $m = 4$.

Bài tập 34: Tìm m để phương trình sau nghiệm đúng với $\forall x > 0$:

$$\sqrt{2^{\log_{m+1} x^2}} = x.$$

☐ $m = -1$. ☐ $m = 1$. ☐ $m = 6$. ☐ Vô nghiệm.

Bài tập 35: Tìm m để 2 phương trình sau tương đương:

$$4^{x+1} + 2^{x+4} = 2^{x+2} + 16,$$

$$|m - 9|.3^{x-2} + m.9^{x-1} = 1.$$

Bài toán 10: Sử dụng phương pháp đánh giá.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Đánh giá tinh tế dựa trên:

a. Tam thức bậc hai.

b. Các bất đẳng thức cơ bản, như Côsi, Bunhiacôpxki,...

c. Tính chất trị tuyệt đối.

...

Từ đó, ta có thể nhanh chóng chỉ ra được nghiệm của nó.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 36: Giải các phương trình sau:

a. $3^{x^2} = \cos 2x$.

☐ $x = 0$. ☐ $x = \pi$. ☐ $x = 1$. ☐ Vô nghiệm.

b. $(x + 1)^{\sqrt{x}} = (2x + 1)^{-x}$.

☐ $x = 0$. ☐ $x = 1$. ☐ $x = 2$. ☐ Vô nghiệm.

c. $(2x-1)^{x^2-x} = (2-x)^{\sqrt{x-1}}$.

☐ $x = 0$. ☐ $x = 1$. ☐ $x = 2$. ☐ $x = 5$.

d. $2^{1-\sin^2 x} = (2+x^2)^{1+x}$.

☐ $x = \pi$. ☐ $x = 2$. ☐ $x = 1$. ☐ $x = 0$.

Bài tập 37: Giải các phương trình sau:

a. $\sqrt[4]{16-x^2} = 2^x + 2^{-x}$.

☐ $x = -1$. ☐ $x = 1$. ☐ $x = 0$. ☐ Vô nghiệm.

b. $3^{x^2-1} + (x^2-1).3^{x+1} = 1$.

☐ $x = 0$. ☐ $x = \pm 1$. ☐ $x = \pm 2$. ☐ $x = \pm\sqrt{2}$.

c. $\sqrt{5^x - 2x} - \sqrt{2x+1} = 1 + 4x + 4x.5^x - 5^{2x}$.

☐ $x = -1$ và $x = 1$. ☐ $x = 0$ và $x = 2$.

☐ $x = 0$ và $x = 1$. ☐ $x = -1$ và $x = 2$.

Bài tập 38: Giải các phương trình sau:

a. $\dfrac{2^x}{4^x+1} + \dfrac{4^x}{2^x+1} + \dfrac{1}{2^x+4^x} = \dfrac{3}{2}$.

☐ $x = 0$. ☐ $x = 1$. ☐ $x = 6$. ☐ Vô nghiệm.

b. $\dfrac{2^x}{2^{2x}+2^{3x}} + \dfrac{2^{2x}}{2^{3x}+2^x} + \dfrac{2^{3x}}{2^x+2^{2x}} = \dfrac{3}{2}$.

☐ $x = -2$. ☐ $x = -1$. ☐ $x = 0$. ☐ $x = 4$.

c. $\dfrac{2^x}{4^x+m^2} + \dfrac{4^x}{m^2 2^x+1} + \dfrac{1}{2^x+m^2 4^x} = \dfrac{3}{m^2+1}$.

☐ $x = -1$. ☐ $x = 0$. ☐ $x = 2$. ☐ $x = m$.

Bài tập 39: Giải các phương trình sau:

a. $3^x = 2x + 1$.

☐ $x = -1$ và $x = 1$. ☐ $x = 0$ và $x = 2$.

☐ $x = 0$ và $x = 1$. ☐ $x = -1$ và $x = 2$.

b. $27^{x^2} = (6x^2 - 4x + 1).9^x$.

☐ $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ và $x = 3$. ☐ $x = -3$, $x = -2$, $x = 2$ và $x = 3$.

☐ $x = 0$, $x = 3$, $x = -1$ và $x = -\dfrac{1}{3}$. ☐ $x = 0$, $x = \dfrac{2}{3}$, $x = 1$ và $x = -\dfrac{1}{3}$.

c. $3^x + 5^x = 6x + 2$.

☐ $x = -1$ và $x = 1$. ☐ $x = 0$ và $x = 2$.

☐ $x = 0$ và $x = 1$. ☐ $x = -1$ và $x = 2$.

d. $7^{|x|} + 3^{|x|} = 8x + 2$.

☐ $x = 0$ và $x = -1$. ☐ $x = 0$ và $x = 2$.

☐ $x = 0$ và $x = 1$. ☐ $x = -1$ và $x = 2$.

e. $9^{|x|} + 3^{|x|} = 10x + 2$.

☐ $x = -1$ và $x = 1$. ☐ $x = 0$ và $x = 2$.

☐ $x = 0$ và $x = 1$. ☐ $x = -1$ và $x = 2$.

f. $2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 3$.

☐ $x = 2k\pi$. ☐ $x = 2k\pi$. ☐ $x = \frac{k\pi}{2}$. ☐ $x = \frac{k\pi}{4}$.

III. HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$2^{2x^2-5x-1} = 2^{-3} \Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 1 = -3 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = \frac{1}{2}.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 2$ hoặc $x = \frac{1}{2}$.

b. Với điều kiện $x \neq \pm 2$, ta biến đổi phương trình về dạng:

$$2^{4\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)} = 2^{-2}.2^{\frac{3x+7}{x^2-4}} \Leftrightarrow \frac{16}{x^2-4} = \frac{3x+7}{x^2-4} - 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = \frac{1}{2}.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 1$ hoặc $x = \frac{1}{2}$.

c. Điều kiện $x \neq 7, 3$.

Phương trình được biến đổi về dạng:

$$(2^5)^{\frac{x+5}{x-7}} = 2^{-2}.(2^7)^{\frac{x+17}{x-3}} \Leftrightarrow 2^{\frac{5(x+5)}{x-7}} = 2^{\frac{7(x+17)}{x-3}-2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5(x+5)}{x-7} = \frac{5x+125}{x-3} \Leftrightarrow (x+5)(x-3) = (x+25)(x-7) \Leftrightarrow x = 10.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 10$.

Bài tập 2.

a. Với điều kiện $x \geq 3$, ta biến đổi phương trình về dạng:

$$(x+2)^{\sqrt{x-3}} = (x+2)^0 \Leftrightarrow (x+2-1)\sqrt{x-3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ \sqrt{x-3}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \text{ loại} \\ x=3 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 3$.

b. Với điều kiện $x > 0$, ta biến đổi phương trình về dạng:

$$x^{\frac{x}{4}} = x^{\sqrt[4]{x}} \Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{x}{4} - \sqrt[4]{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ \dfrac{x}{4} = \sqrt[3]{x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4\sqrt[3]{4} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 1$ hoặc $x = 4\sqrt[3]{4}$.

c. Điều kiện:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-2\sqrt{x-1} \geq 0 \\ x+3-4\sqrt{x-1} \geq 0 \\ \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \neq \frac{13}{4}$$

Phương trình được biến đổi về dạng:

$$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ \begin{cases} x>0 \\ \dfrac{2\sqrt{x-1}-3}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}} = 1 \quad (1) \end{cases} \end{array}\right.$$

Giải (1) bằng cách nhân liên hợp, ta được:

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} + \sqrt{(2-\sqrt{x-1})^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x-1} - 1| + |2 - \sqrt{x-1}| = |(\sqrt{x-1} - 1) + (2 - \sqrt{x-1})|$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-1} - 1)(2 - \sqrt{x-1}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{x-1} \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq x-1 \leq 4 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 5.$$

Vậy, phương trình có nghiệm là $x = 1$, $2 \leq x < \frac{13}{4}$, $\frac{13}{4} < x \leq 5$.

Chú ý:

1. Rất nhiều học sinh giải (1) chỉ thu được nghiệm $x = 2$ và $x = 5$.
2. Bài toán trên có thể giải nhờ tính chất khác của trị tuyệt đối như sau:

$$|\sqrt{x-1} - 1| + |2 - \sqrt{x-1}| = (\sqrt{x-1} - 1) + (2 - \sqrt{x-1})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} - 1 \geq 0 \\ 2 - \sqrt{x-1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} \geq 1 \\ \sqrt{x-1} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 5.$$

Bài tập 3.

a. Với điều kiện $x > 2$, ta biến đổi phương trình về dạng:

$$(x - 2 - 1)(2x^2 - 3x + 2 - x^2 - 3x + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(x^2 - 6x + 8) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 2 \text{ loại} \\ x = 4 \end{array}\right. .$$

Vậy, phương trình có nghiệm là $x = 3$ hoặc $x = 4$.

b. Với điều kiện $x > 3$, ta biến đổi phương trình về dạng:

$$(x - 3)^{3x^2 - 5x + 2} = (x - 3)^{2(x^2 + x - 4)}$$

$$\Leftrightarrow (x - 3 - 1)[3x^2 - 5x + 2 - 2(x^2 + x - 4)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 4)(x^2 - 7x + 10) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 2 \text{ loại} \\ x = 5 \end{array}\right. .$$

Vậy, phương trình có nghiệm là $x = 4$ hoặc $x = 5$.

c. Với điều kiện $-1 < x < 3$, ta biến đổi phương trình về dạng:

$$(3 + 2x - x^2 - 1)(\sqrt{3}\sin x - 1 + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 2 = 0 \\ \sqrt{3}\sin x + \cos x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 + \sqrt{3} \\ x = 1 - \sqrt{3} \\ x = 2k\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. , \text{ với } k \in \mathbb{Z}.$$

- Kiểm tra điều kiện cho nghiệm $x = 2k\pi$, với $k \in \mathbb{Z}$ là:

$$-1 < 2k\pi < 3 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = 0.$$

- Kiểm tra điều kiện cho nghiệm $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$, với $k \in \mathbb{Z}$ là:

$$-1 < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi < 3 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm là $x = 1 \pm \sqrt{3}$, $x = 0$ và $x = \dfrac{2\pi}{3}$.

d. Với điều kiện $-1 < x < 2$, ta biến đổi phương trình về dạng:

$$(2 + x - x^2 - 1)(\sin x - 2 + \sqrt{3}\cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 1 = 0 \\ \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. , \text{ với } k \in \mathbb{Z}.$$

- Kiểm tra điều kiện cho nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, với $k \in \mathbb{Z}$ là:

$$-1 < \frac{\pi}{6} + 2k\pi < 2 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm là $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ và $x = \frac{\pi}{6}$.

Bài tập 4. Biến đổi phương trình về dạng:

$$3^{x^2-4x+5} = 3^{2m} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 2m \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 4x + 5 - 2m = 0. \quad (1)$$

a. Với m = 1, ta được:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right..$$

Vậy, với m = 1 phương trình có hai nghiệm phân biệt x = 1, x = 3.

b. Phương trình ban đầu có hai nghiệm trái dấu

$$\Leftrightarrow (1) \text{ có hai nghiệm trái dấu} \Leftrightarrow a.f(0) < 0 \Leftrightarrow 5 - 2m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{5}{2}.$$

Vậy, với $m > \frac{5}{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 5. Điều kiện

$$x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2. \quad (1)$$

Phương trình tương đương với:

$$(x^2 + 1 - 1)[(1 + \sqrt{x+2}) - (a - \sqrt{x+2})] = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(2\sqrt{x+2} + 1 - a) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2\sqrt{x+2} = a - 1 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 0 với mọi a.

Xét

$$2\sqrt{x+2} = a - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a - 1 \geq 0 \\ 4(x+2) = (a-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 1 \\ x = \dfrac{(a-1)^2 - 8}{4} \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện (1) ta phải có:

$$\begin{cases} a \geq 1 \\ \dfrac{(a-1)^2 - 8}{4} \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 1 \\ (a-1)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \geq 1.$$

Tóm lại:

- Với a < 1 phương trình có nghiệm x = 0.
- Với $a \geq 1$ phương trình có hai nghiệm x = 0 và $x = \frac{(a-1)^2 - 8}{4}$.

Bài tập 6. *Bạn đọc tự làm.*

Bài tập 7.

a. Lấy logarit cơ số 2 hai vế phương trình, ta được:

$$\log_2 2^{x^2} = \log_2 3^{x-1} \Leftrightarrow x^2 = (x-1)\log_2 3 \Leftrightarrow x^2 - x\log_2 3 + \log_2 3 = 0,$$

ta có:

$$\Delta = \log_2^2 3 - 4\log_2 3 = \log_2 3.(\log_2 3 - 4) < 0 \Rightarrow$$ phương trình vô nghiệm.

b. $x = 4$ và $x = -\log_3 18$.

c. Lấy logarit cơ số 3 hai vế, ta được:

$$\log_3(3^{x-2}.5^{x-1}.7^x) = \log_3 245 \Leftrightarrow \log_3 3^{x-2} + \log_3 5^{x-1} + \log_3 7^x = \log_3 245$$

$$\Leftrightarrow x - 2 + (x - 1)\log_3 5 + x\log_3 7 = \log_3 245$$

$$\Leftrightarrow x(1 + \log_3 5 + \log_3 7) = 2 + \log_3 5 + \log_3 245$$

$$\Leftrightarrow x(1 + \log_3 5 + \log_3 7) = 2(1 + \log_3 5 + \log_3 7) \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 2$.

d. $x = 2$.

Bài tập 8.

a. Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$5^x(1 + 5 + 125) = 3^x(1 + 27 - 3) \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{131}{25} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{5}{3}}\frac{131}{25}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = \log_{\frac{5}{3}}\frac{131}{25}$.

b. Với điều kiện $x \neq 0$, ta biến đổi phương trình về dạng:

$$2^{\frac{1}{x}}(\sqrt{x^2+4} - x - 2) = 4(\sqrt{x^2+4} - x - 2)$$

$$\Leftrightarrow (2^{\frac{1}{x}} - 4)(\sqrt{x^2+4} - x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{\frac{1}{x}} = 4 \\ \sqrt{x^2+4} = x + 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x = 0 \text{ loại} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{2}$.

Bài tập 9.

a. Viết lại phương trình dưới dạng:

$$5^{2x} + (2.5)^x = 2.2^{2x}.$$

Chia hai vế bất phương trình cho $2^{2x} \neq 0$, ta được:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{5}{2}\right)^x = 2. \quad (1)$$

Đặt $t = \left(\frac{5}{2}\right)^x$, điều kiện $t > 0$. Khi đó, phương trình (1) có dạng:

$$t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 0$.

b. Viết lại phương trình dưới dạng:

$$6.3^{2x} - 13.(3.2)^x + 6.2^{2x} = 0.$$

Chia hai vế bất phương trình cho $2^{2x} \neq 0$, ta được:

$$6\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 13\left(\frac{3}{2}\right)^{x} + 6 = 0. \qquad (2)$$

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, điều kiện $t > 0$. Khi đó, phương trình (2) có dạng:

$$6t^2 - 13t + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{3}{2} \\ t = \frac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{2} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = \pm 1$.

c. Chia hai vế bất phương trình cho $2^x \neq 0$, ta được:

$$4.\left(\frac{3}{2}\right)^{x} - 9 = 5.\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{x}{2}}. \qquad (3)$$

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{x}{2}}$, điều kiện $t > 0$. Khi đó, phương trình (3) có dạng:

$$4t^2 - 5t - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{9}{4} \\ t = -1 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{x}{2}} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 2 \Leftrightarrow x = 4.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 4$.

d. Chia hai vế bất phương trình cho $2^{3x} \neq 0$, ta được:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{3x} + \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} = 2. \qquad (4)$$

Đặt $t = \left(\frac{5}{2}\right)^x$, điều kiện $t > 0$. Khi đó, phương trình (4) có dạng:

$$t^3 + t^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t^2 + 2t + 2) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 0$.

Đặt $t = 2^{2x}$, điều kiện $t > 0$. Khi đó, bằng việc viết lại phương trình dưới dạng:

$$2^{2x} + \frac{8}{2^{2x}} = 6 \Leftrightarrow t + \frac{8}{t} = 6 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{2x} = 4 \\ 2^{2x} = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1 \text{ và } x = \frac{1}{2}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{2}$ và $x = 1$.

$x = \log_{0,7}7$.

Phương trình vô nghiệm. Đáp số này có được bằng một trong hai cách sau:

Cách 1: Nhận xét rằng:

$3^{\sqrt{x}} > 0$; $3^{1-\sqrt{x}} > 0$ suy ra VT > 4, do đó phương trình vô nghiệm.

Cách 2: Sử dụng ẩn phụ $t = 3^{\sqrt{x}}$.

Bài tập 10.

Điều kiện:

$$1 - 9^x \geq 0 \Leftrightarrow 9^x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0. \qquad (*)$$

Biến đổi phương trình về dạng :

$$4.3^{3x} - 3.3^x = \sqrt{1 - 3^{2x}}.$$

Với điều kiện (*) thì $0 < 3^x \leq 1$, đặt $3^x = \cos t$ với $t \in [0, \frac{\pi}{2})$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$4\cos^3 t - 3\cos t = \sqrt{1 - \cos^2 t} \Leftrightarrow \cos 3t = \sin t = \cos(\frac{\pi}{2} - t)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3t = \frac{\pi}{2} - t + 2k\pi \\ 3t = -\frac{\pi}{2} + t + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ t = -\frac{\pi}{4} + k\pi \ \text{(loại)} \end{array}\right. \overset{0 \leq t < \frac{\pi}{2}}{\Leftrightarrow} t = \frac{\pi}{8}.$$

Ta có:

$$\cos\frac{\pi}{4} = \cos(2.\frac{\pi}{8}) = 2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1 \Leftrightarrow \cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}.$$

Do đó:

$$t = \frac{\pi}{8} \Leftrightarrow 3^x = \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \Leftrightarrow x = \log_3\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = \log_3\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.

b. Viết lại phương trình dưới dạng:

$$\left(2^{3x} - \frac{2^3}{2^{3x}}\right) - 6\left(2^x - \frac{2}{2^x}\right) = 1. \qquad (1)$$

Đặt $t = 2^x - \frac{2}{2^x}$, suy ra:

$$2^{3x} - \frac{2^3}{2^{3x}} = \left(2^x - \frac{2}{2^x}\right)^3 + 3.2^x.\frac{2}{2^x}\left(2^x - \frac{2}{2^x}\right) = t^3 + 6t.$$

Khi đó, phương trình (1) có dạng:

$$t^3 + 6t - 6t = 1 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow 2^x - \frac{2}{2^x} = 1. \qquad (2)$$

Đặt $u = 2^x$, điều kiện $u > 0$, khi đó phương trình (2) có dạng:

$$u - \frac{2}{u} = 1 \Leftrightarrow u^2 - u - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = -1 \\ u = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow u = 2 \Leftrightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 1$.

c. Nhận xét rằng:

$$\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}\,.\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = 1.$$

Do đó, nếu đặt $t = (\sqrt{7 + 4\sqrt{3}})^{\sin x}$, điều kiện $t > 0$ thì $(\sqrt{7 - 4\sqrt{3}})^{\sin x} = \frac{1}{t}$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$t + \frac{1}{t} = 4 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 - \sqrt{3} \\ t = 2 + \sqrt{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{7 + 4\sqrt{3}})^{\sin x} = 2 - \sqrt{3} \\ (\sqrt{7 + 4\sqrt{3}})^{\sin x} = 2 + \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} [\sqrt{(2 + \sqrt{3})^2}\,]^{\sin x} = (2 + \sqrt{3})^{-1} \\ [\sqrt{(2 + \sqrt{3})^2}\,]^{\sin x} = 2 + \sqrt{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2 + \sqrt{3})^{\sin x} = (2 + \sqrt{3})^{-1} \\ (2 + \sqrt{3})^{\sin x} = 2 + \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \sin x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$.

d. $x = \pm 1$.

e. Viết lại phương trình dưới dạng:

$$(2 + \sqrt{3})^{x-1} + (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^x = 4 \Leftrightarrow (2 + \sqrt{3})^{x-1} + \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^{x-1}} = 4.$$

Đặt $t = (2 + \sqrt{3})^{x-1}$, điều kiện $t > 0$, khi đó phương trình (2) có dạng:

$$t + \frac{1}{t} = 4 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 + \sqrt{3} \\ t = 2 - \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2 + \sqrt{3})^{x-1} = 2 + \sqrt{3} \\ (2 + \sqrt{3})^{x-1} = (2 + \sqrt{3})^{-1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 0 \end{array}\right. .$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 2$ và $x = 0$.

Bài tập 11.

a. Đặt $t = 2^{\sin^2 x}$, điều kiện $t \geq 1$. Khi đó, phương trình có dạng:

$$t^2 + \frac{2}{t} = 2 + \sqrt{2} \Leftrightarrow t^3 - (2 + \sqrt{2})t + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t - \sqrt{2})(t^2 + t\sqrt{2} - \sqrt{2}) = 0 \overset{t \geq 1}{\Leftrightarrow} t = \sqrt{2} \Leftrightarrow 2^{\sin^2 x} = 2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in Z.$$

b. $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in Z.$

c. $x = \frac{k\pi}{2}, k \in Z.$

d. Điều kiện $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$. (*)

Vì $\sin^{-2} x = \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \text{cotg}^2 x$, nên phương trình được viết lại dưới dạng:

$$4^{\text{cotg}^2 x} + 2.2^{\text{cotg}^2 x} - 3 = 0. \quad (1)$$

Đặt $t = 2^{\text{cotg}^2 x}$, điều kiện $t \geq 1$ vì $\text{cotg}^2 x \geq 0 \Leftrightarrow 2^{\text{cotg}^2 x} \geq 2^0 = 1$.
Khi đó, phương trình (1) có dạng:

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow 2^{\text{cotg}^2 x} = 1$$

$$\Leftrightarrow \text{cotg}^2 x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \text{ nghiệm này thoả mãn (*)}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 12.

a. Đặt $t = 3^x$, điều kiện $t > 0$, phương trình có dạng:

$$t^2 - 4t - m + 3 = 0, \quad (1)$$

ta có $\Delta' = m + 1$.

Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1. Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m + 1 < 0 \Leftrightarrow m < -1$.

Phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2. Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

Phương trình (1) có nghiệm kép $t = 2 \Leftrightarrow 3^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_3 2$.

Trường hợp 3. Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{m+1}$.

Xét hai khả năng:

- *Khả năng 1.* Với $t_1 = 2 - \sqrt{m+1} > 0 \Leftrightarrow m < 3$, khi đó cả hai nghiệm $t_{1,2}$ đều thoả mãn điều kiện $t > 0$, do đó ta được:

$$\left[\begin{array}{l} 3^x = 2 - \sqrt{m+1} \\ 3^x = 2 + \sqrt{m+1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \log_3(2 - \sqrt{m+1}) \\ x_2 = \log_3(2 + \sqrt{m+1}) \end{array}\right. .$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt.

- *Khả năng 2.* Với $t_1 = 2 - \sqrt{m+1} \le 0 \Leftrightarrow m \ge 3$, khi đó chỉ có nghiệm $t_2 = 2 + \sqrt{m+1}$ đều thoả mãn điều kiện $t > 0$, do đó ta được:

$$3^x = 2 + \sqrt{m+1} \Leftrightarrow x = \log_3(2 + \sqrt{m+1})$$

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhât.

Kết luận:

- Với $m < -1$, phương trình vô nghiệm.
- Với $m = -1$, phương trình có nghiệm $x = \log_3 2$.
- Với $-1 < m < 3$, phương trình có 2 nghiệm $x_{1,2} = \log_3(2 \pm \sqrt{m+1})$.
- Với $m \ge 3$, phương trình có nghiệm $x = \log_3(2 + \sqrt{m+1})$.

Chu ý: Với câu hỏi tìm m để phương trình trên có nghiệm duy nhất, khi nhìn vào kết quả biện luận trên ta có giá trị của m là $m = -1$ hoặc $m \ge 3$, tuy nhiên khi đi giải dựa trên định lý đảo về dấu tam thức bậc hai rất nhiều em học sinh chỉ tìm ra nghiệm $m = -1$, để tránh được thiếu sót đó các em cần xem kỹ lời giả sau:

Phương trình đã cho các nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \text{phương trình (1) có nghiệm } t_1, t_2 \text{ thoả mãn } \left[\begin{array}{l} 0 < t_1 = t_2 \\ t_1 \le 0 < t_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < t_1 = t_2 \\ t_1 < 0 < t_2 \\ t_1 = 0 < t_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \Delta' = 0 \\ -\dfrac{b}{2a} > 0 \end{cases} \\ af(0) < 0 \\ \begin{cases} f(0) = 0 \\ t_2 = -\dfrac{b}{a} > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m \ge 3 \end{array}\right. .$$

b. *Bạn đọc tự làm.*

c. *Bạn đọc tự làm.*

d. Đặt $t = 2^x$, điều kiện $t > 0$.

Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$(m-2)t^2 - 2(m+1)t + m - 5 = 0. \qquad (2)$$

Ta đi xác định các giá trị của Δ', S, P:

$$\Delta' = 9m - 9,\ S = \frac{2(m+1)}{m-2},\ P = \frac{m-5}{m-2}.$$

Ta có bảng tổng kết sau:

m	Δ'	P	S	**Dấu các nghiệm**
$-\infty$	-	+	+	Phương trình vô nghiệm
-1			0	
	-	+	-	
1	0			Phương trình có nghiệm kép $t=-2<0$ (l)
	+	+	-	Phương trình có 2 nghiệm thoả mãn $t_1<t_2<0$ (l)
2	$\|$	$\|$		Phương trình có một nghiệm $t=-1/2<0$ (l)
	+	-	+	Phương trình có 2 nghiệm $t_1<0<t_2$ lấy nghiệm t_2
5		0		Phương trình có 2 nghiệm thoả mãn $0=t_1<t_2$ lấy nghiệm t_2
	+	+	+	Phương trình có 2 nghiệm thoả mãn $0<t_1<t_2$
$+\infty$				

Kết luận:

- Với $m \le 2$, phương trình vô nghiệm.
- Với $2 < m \le 5$, ta nhận được nghiệm từ phương trình (2) là:

$$t_2 = \frac{m+1+3\sqrt{m-1}}{m-2} \Leftrightarrow 2^x = \frac{m+1+3\sqrt{m-1}}{m-2}.$$

$$\Leftrightarrow x = \log_2\frac{m+1+3\sqrt{m-1}}{m-2}$$ là nghiệm duy nhất.

- Với $m > 5$, ta nhận được nghiệm từ phương trình (2) là:

$$t_{1,2} = \frac{m+1\pm3\sqrt{m-1}}{m-2} \Leftrightarrow 2^x = \frac{m+1\pm3\sqrt{m-1}}{m-2}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \log_2\frac{m+1\pm3\sqrt{m-1}}{m-2}$$ là hai nghiệm phân biệt.

Bài tập 13.

a. $m \in (-3, \frac{3}{2}]$.

b. $m \ge 0$.

Bài tập 14. Biến đổi phương trình ban đầu (ký hiệu (1)) về dạng:

$$2^{2x} - 4.2^x - m = 0. \qquad (2)$$

Đặt $t = 2^x$, điều kiện $t > 0$, khi đó phương trình (2) tương đương với:

$$t^2 - 4t - m = 0. \qquad (3)$$

a. Với $m = 32$ phương trình (3) có dạng:

$$t^2 - 4t - 32 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 8 \\ t = -4 \ (l) \end{array}\right. \Leftrightarrow 2^x = 8 \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy, với $m = 32$ phương trình có nghiệm $x = 3$.

b. Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (3) có 2 nghiệm dương phân biệt ($0<t_1<t_2$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + m > 0 \\ 4 > 0 \\ -m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m < 0.$$

Vậy, với $-4 < m < 0$ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Bài tập 15.

a. $x = 0$ và $x = \frac{1}{2}$.

b. $m \le 0$ và $m = \frac{25}{8}$.

Bài tập 16. Đặt $t = 2^x$, điều kiện $t > 0$, khi đó phương trình ban đầu (ký hiệu (1)) có dạng:

$$t^2 - 2mt + 2m = 0. \qquad (2)$$

a. Với $m = 2$, ta được:

$$t^2 - 4t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, với $m = 2$ phương trình có một nghiệm $x = 1$.

b. Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$\Rightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 tương ứng:

$$t_1 = 2^{x_1} \text{ và } t_2 = 2^{x_2}.$$

Vì $x_1 + x_2 = 3$ nên:

$$2^{x_1+x_2} = 2^3 \Leftrightarrow 2^{x_1}.2^{x_2} = 8 \Leftrightarrow t_1.t_2 = 8.$$

Vậy, để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1 + x_2 = 3$

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $t_1, t_2 > 0$ thoả mãn $t_1.t_2 = 8$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m = 8 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4.$$

Vậy, với $m = 4$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 17. Đặt $t = 2^{x^2+1}$, vì $x^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow 2^{x^2+1} \geq 2^1 \Leftrightarrow t \geq 2$.

Khi đó, phương trình ban đầu (ký hiệu (1)) có dạng:

$$f(t) = (m - 2).t^2 - 2(m + 1)t + 2m - 6 = 0. \qquad (2)$$

a. Với m = 9, ta được:

$$7t^2 - 20t + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = \frac{6}{7} \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow 2^{x^2+1} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, với m = 9 phương trình có nghiệm x = 0.

b. Ta xét các trường hợp:

- Với m = 2

$$(2) \Leftrightarrow -6t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3} < 2 \text{ do đó phương trình vô nghiệm.}$$

- Với $m \neq 2$, (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t \geq 2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{(2) co 1 nghiem } t \geq 2 \\ \text{(2) co 2 nghiem } t \geq 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} af(2) \leq 0 \\ \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(2) \geq 0 \\ \frac{S}{2} \geq 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (m-2)(2m-18) \leq 0 \\ \begin{cases} -m^2 + 12m - 11 \geq 0 \\ (m-2)(2m-18) \geq 0 \\ \frac{-m+5}{m-2} \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow 2 < m \leq 9$.

Vậy, với $2 < m \leq 9$ phương trình có nghiệm.

Bài tập 18.

a. $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

b. $m > 2$.

Bài tập 19.

a. Đặt $t = 3^x$, điều kiện $t > 0$. Khi đó, phương trình có dạng:

$$t^2 + 2(x - 2)t + 2x - 5 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \ \text{(l)} \\ t = 5 - 2x \end{array}\right. \Leftrightarrow 3^x = 5 - 2x.$$

- Ta đoán được nghiệm x = 1, vì $3^1 = 5 - 2$.
- Vế trái là một hàm số đồng biến.
- Vế phải là hàm số nghịch biến.
- Vậy x = 1 là nghiệm duy nhất của phương trình này.

Vậy, phương trình có nghiệm x = 1.

b. Đặt $t = 3^x$, điều kiện $t > 0$.

Khi đó, phương trình tương đương với:

$$t^2 - (2^x + 9)t + 9.2^x = 0$$

ta có $\Delta = (2^x + 9)^2 - 4.9.2^x = (2^x - 9)^2$ nên phương trình có nghiệm $t = 9$ và $t = 2^x$.

Khi đó:

- Với $t = 9 \Leftrightarrow 3^x = 9 \Leftrightarrow x = 2$.
- Với $t = 2^x \Leftrightarrow 3^x = 2^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 2$, $x = 0$.

c. Đặt $t = 3^x$, điều kiện $t > 0$, ta được :

$$t^2 + \sqrt{t+5} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{t+5} = 5 - t^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 - t^2 \geq 0 \\ t + 5 = (5 - t^2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t \leq \sqrt{5} \\ t + 5 = 5^2 - 2t^2.5 + t^4 \end{cases} \quad (1)$$

Đặt $u = 5$, phương trình (1) có dạng:

$$u^2 - (2t^2 + 1)u + t^4 - t = 0.$$

ta xét phương trình bậc hai theo u, được :

$$\Delta = (2t^2 + 1)^2 - 4(t^4 - t) = 4t^2 + 4t + 1 = (2t + 1)^2,$$

suy ra:

$$\left[\begin{array}{l} u = \dfrac{2t^2 + 1 - (2t + 1)}{2} \\ u = \dfrac{2t^2 + 1 + (2t + 1)}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5 = t^2 - t \\ 5 = t^2 + t + 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2 - t - 5 = 0 \ (l) \\ t^2 + t - 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-1 - \sqrt{17}}{2} \quad (l) \\ t = \dfrac{-1 + \sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 3^x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \Leftrightarrow x = \log_3 \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = \log_3 \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$.

Bài tập 20.

a. Vô nghiệm.

b. $m < -3$.

Bài tập 21. Đặt $t = 3^x$, điều kiện $t > 0$, ta được:

$$m^2t^3 - 3mt^2 + (m^2 + 2)t - m = 0 \Leftrightarrow (t^3 + t)m^2 - (3t^2 + 1)m + 2t = 0. \quad (2)$$

Coi m là ẩn, còn x là tham số, ta được phương trình bậc 2 theo m, nên:

$$\left[\begin{array}{l} m = \dfrac{1}{t} \\ m = \dfrac{2t}{t^2+1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{m} \\ f(t) = mt^2 - 2t + m = 0 \end{array}\right. \quad (3)$$

a. Với m = 2, ta được:

$$\left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{2} \\ t^2 - t + 1 = 0 \text{ vn} \end{array}\right. \Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \log_3 \frac{1}{2} = -\log_3 2.$$

Vậy, với m = 2 phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\log_3 2$.

b. Phương trình có 3 nghiệm phân biệt ⇔ phương trình (3) có 2 nghiệm phân biệt dương khác $\frac{1}{m}$ và $\frac{1}{m} > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{m} > 0 \\ \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \\ f(-\dfrac{1}{m}) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 1 - m^2 > 0 \\ \dfrac{2}{m} > 0 \\ 1 > 0 \\ m - \dfrac{1}{m} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

Vậy, với 0 < m < 1 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 22.

a. x = 0 và x = ±1.

b. x = 1 và x = 3.

c. x = ±1, x = 2 và x = −5.

Bài tập 23.

a. Đặt:

$$\begin{cases} u = 9^{x^2-2x+m} \\ v = 3^{x^2+2m-3} \end{cases}, \text{ điều kiện } u, v > 0.$$

Nhận xét rằng:

$$\frac{u}{v} = \frac{9^{x^2-2x+m}}{3^{x^2+2m-3}} = \frac{3^{2(x^2-2x+m)}}{3^{x^2+2m-3}} = 3^{x^2-4x+3} = 3^{(x-2)^2-1}.$$

Khi đó, phương trình ban đầu (kí hiệu là (1)) tương đương với:

$$u - v = \frac{u}{v} - 1 \Leftrightarrow (u - v)(v - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v \\ v = 1 \end{array}\right..$$

- Với u = v ta được:

$$9^{x^2-2x+m} = 3^{x^2+2m-3} \Leftrightarrow 3^{2(x^2-2x+m)} = 3^{x^2+2m-3}$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2-2x+m) = x^2+2m-3 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$$

- Với v = 1 ta được:

$$3^{x^2+2m-3} = 1 \Leftrightarrow x^2+2m-3=0 \Leftrightarrow x^2 = 3-2m. \qquad (2)$$

- Với $3-2m<0 \Leftrightarrow m>\frac{3}{2}$, phương trình (2) vô nghiệm.
- Với $3-2m=0 \Leftrightarrow m=\frac{3}{2}$, phương trình (2) có nghiệm $x = 0$.
- Với $3-2m>0 \Leftrightarrow m<\frac{3}{2}$, phương trình (2) có nghiệm $x=\pm\sqrt{3-2m}$.

Kết luận:

- Với $m>\frac{3}{2}$, phương trình có hai nghiệm $x = 1$, $x = 3$.
- Với $m=\frac{3}{2}$, phương trình (2) có ba nghiệm $x = 0$, $x = 1$, $x = 3$.
- Với $m<\frac{3}{2}$, phương trình (2) có bốn nghiệm $x=\pm\sqrt{3-2m}$, $x = 1$, $x = 3$.

b. *Bạn đọc tự làm.*

Bài tập 24. Viết lại phương trình dưới dạng:

$$\frac{8}{2^{x-1}+1} + \frac{1}{2^{1-x}+1} = \frac{18}{2^{x-1}+2^{1-x}+2}.$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = 2^{x-1}+1 \\ v = 2^{1-x}+1 \end{cases}, \text{ điều kiện } u,v>1.$$

Khi đó:

$$u.v = (2^{x-1}+1).(2^{1-x}+1) = 2^{x-1}+2^{1-x}+2 = u+v.$$

Phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} \frac{8}{u}+\frac{1}{v} = \frac{18}{u+v} \\ u+v=uv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+8v=18 \\ u+v=uv \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v=2 \\ u=9 \;\&\; v=\frac{9}{8} \end{array}\right.$$

Với $u = v = 2$, ta được:

$$\begin{cases} 2^{x-1}+1=2 \\ 2^{1-x}+1=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

- Với $u = 9$ và $v = \frac{9}{8}$, ta được:

$$\begin{cases} 2^{x-1} + 1 = 9 \\ 2^{1-x} + 1 = \frac{9}{8} \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Vậy, phương trình đã cho có các nghiệm $x = 1$ và $x = 4$.

Bài tập 25. Đặt $u = 3^x$, điều kiện $u > 0$.

Khi đó, phương trình được chuyển thành:

$$u^3 + 2 = 3\sqrt[3]{3u - 2}.$$

Đặt $v = \sqrt[3]{3u - 2}$.

Khi đó, phương trình được chuyển thành hệ:

$$\begin{cases} u^3 + 2 = 3v \\ v^3 = 3u - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 + 2 = 3v & (1) \\ v^3 + 2 = 3u & (2) \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = -3(u - v)$$

$$\Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u - v = 0 \\ u^2 + uv + v^2 + 3 = 0 \text{ (vn)} \end{array}\right. \Leftrightarrow u = v.$$

Thay $u = v$ vào (1) được :

$$u^3 - 3u + 2 = 0 \Leftrightarrow (u - 1)(u^2 + u - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u - 1 = 0 \\ u^2 + u - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 1 \\ u = -2 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow 3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, nghiệm của phương trình là $x = 0$.

Bài tập 26. Đặt $t = 3^x$, điều kiện $t > 0$, ta được:

$$t^3 + a.3^b.t^2 + b.3^a.t - 1 = 0. \qquad (2)$$

Để chứng minh với mọi a, b phương trình ban đầu luôn có ít nhất một nghiệm, ta đi chứng minh (2) luôn có một nghiệm dương, thật vậy:

Xét hàm số $f(t) = t^3 + a.3^b.t^2 + b.3^a.t - 1$ liên tục trên **R**.

Ta có:

$f(0) = -1 < 0$

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$, vậy tồn tại $c > 0$ để $f(c) > 0$.

suy ra $f(0).f(c) < 0$

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) luôn có một nghiệm $t \in (0, c)$

$\Leftrightarrow$ (2) luôn có một nghiệm dương.

Vậy, với mọi a, b phương trình luôn có ít nhất một nghiệm.

Bài tập 27. Xét hàm số $y = 3^x - 4^{-x}$ liên tục trên **R**.

Ta có:

$\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$, vậy tồn tại $a < 0$ để $f(a) < 0$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$, vậy tồn tại $b > 0$ để $f(b) > 0$.

$\Rightarrow f(a).f(b) < 0 \Leftrightarrow$ phương trình luôn có nghiệm $x_0 \in (a, b)$.

Vậy, với mọi m phương trình luôn có nghiệm.

Bài tập 28.

a. $x = 1$. b. $x = 2$. c. $x = 2$.

Bài tập 29.

a. Đặt $t = 3^{x-2}$, điều kiện $t > 0$. Khi đó, phương trình tương đương với:

$$3t^2 + (3x - 10)t + 3 - x = 0$$

ta có $\Delta=(3x-10)^2-4.3.(3-x)=(3x-8)^2$ suy ra phương trình có nghiệm

$$\left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{3} \\ t = 3 - x \end{array}\right..$$

- Với $t = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 3^{x-2} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x - 2 = -1 \Leftrightarrow x = 1$.
- Với $t = 3 - x \Leftrightarrow 3^{x-2} = 3 - x$.

Ta đoán được nghiệm $x = 2$, vì $3^0 = 3 - 2$. Vế trái là một hàm số đồng biến còn vế phải là hàm số nghịch biến, do vậy $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình này.

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 1$ và $x = 2$.

b. $x = 1$ và $x = -\log_2 3$.

c. $x = 0$ và $x = 2$.

d. $x = 1$.

e. Viết lại phương trình ban đầu (kí hiệu là (1)) dưới dạng:

$$(2^x + x)^3 + (2^x + x) = 2. \qquad (2)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ là hàm đồng biến và $f(1)=2$. Ta được:

$$f(2^x + x) = f(1) \Leftrightarrow 2^x + x = 1 \Leftrightarrow 2^x = 1 - x. \qquad (3)$$

- Vế trái của (3) là một hàm đồng biến.
- Vế phải của (3) là một hàm nghịch biến.

Do vậy, nếu phương trình có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Nhận xét rằng $x = 0$ là nghiệm của phương trình vì $2^0 = 1 - 0$.

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 0$.

Chú ý: Cũng có thể sử dụng phương pháp ẩn phụ, cụ thể:

Đặt $t = 2^x + x$, ta được:

$$t^3 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t^2 + t + 2) = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

f. Viết lại phương trình dưới dạng:

$$2^{x-1} + x - 1 = 2^{x^2 - x} + x^2 - x.$$

Xét hàm số $f(t)=2^t+t$ đồng biến trên **R**.

Vậy, phương trình được viết dưới dạng:

$$f(x - 1) = f(x^2 - x) \Leftrightarrow x - 1 = x^2 - x \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 1$.

Bài tập 30.

a. Điều kiện:

$$\begin{cases} 2x - 5 \neq 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 5/2 \\ x \neq 1 \end{cases}.$$

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$e^{|2x-5|} - \frac{1}{|2x-5|} = e^{|x-1|} - \frac{1}{|x-1|}. \qquad (2)$$

Xét hàm số $f(x)=e^x - \dfrac{1}{x}$ trên miền xác định $D = \mathbf{R}\backslash\{0\}$ và dễ thấy nó là hàm đồng biến trên D.

Khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow f(|2x - 5|) = f(|x - 1|) \Leftrightarrow |2x - 5| = |x - 1|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 5 = x - 1 \\ 2x - 5 = -x + 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 2 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 4$ và $x = 2$.

b. Điều kiện:

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 1 \\ x \geq 2 \end{array}\right..$$

Đặt $u = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$, điều kiện $u \geq 0$ suy ra:

$$x^2 - 3x + 2 = u^2 \Leftrightarrow 3x - x^2 - 1 = 1 - u^2.$$

Khi đó, phương trình ban đầu (kí hiệu là (1)) có dạng:

$$\log_3(u + 2) + \left(\frac{1}{5}\right)^{1-u^2} = 2. \qquad (2)$$

Xét hàm số $f(x) = \log_3(x + 2) + \left(\dfrac{1}{5}\right)^{1-x^2} = \log_3(x + 2) + \dfrac{1}{5}.5^{x^2}$ trên miền xác định $D = [0, +\infty)$ và dễ thấy nó là hàm đồng biến trên D.

Mặt khác $f(1) = \log_3(1 + 2) + \frac{1}{5}.5 = 2$.

Vậy, phương trình (2) có dạng:

$$f(u) = f(1) \Leftrightarrow u = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 2} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Vậy, phương trình có **hai nghiệm** $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Bài tập 31. Viết lại phương trình ban đầu (kí hiệu là (1)) dưới dạng:

$$2^{m^2x+6} + m^2x + 6 = 2^{4x+3m} + 4x + 3m. \qquad (2)$$

Xét hàm số $f(x) = 2^x + x$ là hàm đồng biến trên $\mathbf{R}$. Ta có:

$$(2) \Leftrightarrow f(m^2x + 6) = f(4x + 3m) \Leftrightarrow m^2x + 6 = 4x + 3m$$

$$\Leftrightarrow (m^2 - 4)x = 3m - 6. \qquad (3)$$

a. Nếu $m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

- Với $m = 2$, phương trình (3) $\Leftrightarrow 0x = 0$.

  Vậy, phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbf{R}$.

- Với $m = -2$, phương trình (3) $\Leftrightarrow 0x = -12$.

  Vậy, phương trình vô nghiệm.

b. Nếu $m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$.

Phương trình (2) $\Leftrightarrow x = \frac{3}{m+2}$: phương trình có nghiệm duy nhất.

Kết luận:

- Với $m \neq \pm 2$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{3}{m+2}$.
- Với $m = 2$, phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbf{R}$.
- Với $m = -2$, phương trình vô nghiệm.

Bài tập 32.

Điều kiện cần: Giả sử phương trình ban đầu (kí hiệu là (1)) có nghiệm $x=x_0$ suy ra:

$$\frac{1}{3^{|x_0 - 2|}} = 2m - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3^{|(4 - x_0) - 2|}} = 2m - 1 \Rightarrow 4 - x_0 \text{ cũng là nghiệm của } (1).$$

Vậy (1) có nghiệm duy nhất khi

$$x_0 = 4 - x_0 \Leftrightarrow x_0 = 2.$$

Thay $x_0 = 2$ vào (1), ta được $m = 1$.

Đó chính là điều kiện cần để phương trình có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ: Với $m = 1$, khi đó (1) có dạng:

$$\frac{1}{3^{|x-2|}} = 1 \Leftrightarrow 3^{|x-2|} = 1 \Leftrightarrow |x - 2| = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

Vậy, với $m = 1$ phương trình có nghiệm duy nhất.

Bài tập 33. Ký hiệu phương trình ban đầu là (1).

Điều kiện cần: Giải sử (1) có nghiệm x_0, ta có:

$$2^{mx_0(2-x_0)} = 3^{|x_0-1|} + m \Leftrightarrow 2^{m(2-x_0)[2-(2-x_0)]} = 3^{|(2-x_0)-1|} + m$$

tức là $2 - x_0$ cũng sẽ là nghiệm của phương trình.

Vậy, để phương trình có nghiệm duy nhất điều kiện là

$$2 - x_0 = x_0 \Leftrightarrow x_0 = 1.$$

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow 2^m = m + 1 \Leftrightarrow 2^m + m(1-2) = 1 \overset{\text{Bernoulli}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right. .$$

Đó chính là điều kiện cần để phương trình có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ

- Với $m = 0$, ta có:

  $$(1) \Leftrightarrow 1 = 3^{|x-1|} \Leftrightarrow |x-1| = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

  là nghiệm duy nhất của phương trình.
- Với $m = 1$, ta có:

  $$(1) \Leftrightarrow 2^{x(2-x)} = 3^{|x-1|} + 1. \qquad (2)$$

  Ta có nhận xét sau:

  $$x(2-x) = -x^2 + 2x = 1 - (x-1)^2 \leq 1 \Rightarrow VT = 2^{x(2-x)} \leq 2.$$

  $$|x-1| \geq 0 \Rightarrow VP = 3^{|x-1|} + 1 \geq 3^0 + 1 = 2.$$

  Vậy phương trình (2) tương đương với:

  $$\begin{cases} VT = 2 \\ VP = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 2x = 1 \\ |x-1| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

  là nghiệm duy nhất của phương trình

Vậy, với $m = 0$ và $m = 1$ phương trình có nghiệm duy nhất.

Bài tập 34. Ký hiệu phương trình ban đầu là (1).

Điều kiện cần: Giả sử (1) có nghiệm $\forall x > 0 \Rightarrow x = \sqrt{m+1}$ là nghiệm của (1), khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2^{\log_{m+1}(\sqrt{m+1})^2}} = \sqrt{m+1} \Leftrightarrow \sqrt{2} = \sqrt{m+1} \Leftrightarrow m = 1$$

Đó chính là điều kiện cần để phương trình nghiệm đúng với $\forall x > 0$.

Điều kiện đủ: Với $m = 1$, khi đó (1) có dạng:

$$\sqrt{2^{\log_2 x^2}} = x \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = x \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x = x \text{ luôn đúng.}$$

Vậy, với $m = 1$ phương trình nghiệm đúng với $\forall x > 0$.

Bài tập 35. Ký hiệu hai phương trình ban đầu theo thứ tự là (1) và (2).

Giải (1), bằng cách đặt $t = 2^x$, ta được nghiệm $x = 0$.

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = 0$ do đó (1) và (2) tương đương khi và chỉ khi (2) có đúng một nghiệm $x = 0$.

Điều kiện cần: Giả sử (2) có nghiệm là $x = 0$ suy ra:

$$\frac{|m-9|}{9}+\frac{m}{9}=1 \Leftrightarrow |m-9| = 9-m \Leftrightarrow m-9 \le 0 \Leftrightarrow m \le 9.$$

Đó chính là điều kiện cần để 2 phương trình tương đương.

Điều kiện đủ: Giả sử $m \le 9$, đặt $t = 3^x$, điều kiện $t > 0$ khi đó (2) có dạng:

$$\frac{1}{9}(9-m)t+\frac{1}{9}mt^2 = 1 \Leftrightarrow mt^2+(9-m)t-9=0. \qquad (3)$$

- Với $m = 0$

  $(3) \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình .

Vậy $m = 0$ thì (1) và (2) tương đương.

- Với $0 \ne m \le 9$ thì:

$$(3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\dfrac{9}{m} \end{array}\right..$$

Vậy để (1) và (2) tương đương điều kiện là:

$$\left[\begin{array}{l} -\dfrac{9}{m} = 1 \\ -\dfrac{9}{m} < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -9 \\ m > 0 \end{array}\right. \xleftrightarrow{0 \ne m \le 9} \left[\begin{array}{l} m = -9 \\ 0 < m \le 9 \end{array}\right..$$

Vậy, với $0 \le m \le 9$ hoặc $m = -9$ thì (1) và (2) tương đương.

Bài tập 36. Giải các phương trình:

a. Ta có $x^2 \ge 0 \Rightarrow 3^{x^2} \ge 3^0 = 1 \ge \cos 2x$.

Suy ra, phương trình đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases} 3^{x^2} = 1 \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, phương trình có **nghiệm** $x = 0$.

b. Điều kiện $x \ge 0$.

Ta có :

$\sqrt{x} \ge 0$ và $x + 1 \ge 1 \Rightarrow VT = (x+1)^{\sqrt{x}} \ge (x+1)^0 = 1.$

$-x \le 0$ và $2x + 1 \ge 1 \Rightarrow VP = (2x+1)^{-x} \le (2x+1)^0 = 1.$

Suy ra, phương trình đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases} VT = 1 \\ VP = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^{\sqrt{x}} = 1 \\ (2x+1)^{-x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 0$.

c. Điều kiện $1 \le x < 2$. (*)

Với điều kiện (*), ta có nhận xét:

$$\begin{cases} 2x + 1 \ge 1 \\ x^2 - x \text{ đồng biến và } 0 \le x^2 - x < 2 \end{cases} \Rightarrow VT \ge 1.$$

$$\begin{cases} \sqrt{x - 1} \ge 0 \\ 2 - x < 1 \end{cases} \Rightarrow VP \le 1.$$

Suy ra phương trình đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases} VT = 1 \\ VP = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 1$.

d. $x = 0$.

Bài tập 37.

a. Điều kiện $16 - x^2 \ge 0 \Leftrightarrow |x| \le 4$. (*)

Ta có nhận xét:

$$VT = \sqrt[4]{16 - x^2} \le \sqrt[4]{16} = 2.$$

$$VP = 2^x + 2^{-x} \overset{Cosi}{\ge} 2\sqrt{2^x.2^{-x}} = 2.$$

Suy ra phương trình đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases} VT = 2 \\ VP = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2^x = 2^{-x} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 0$.

b. $x = \pm 1$.

c. Điều kiện

$$\begin{cases} 5^x \ge 2x \\ x \ge -\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Bằng việc sử dụng ẩn phụ:

$$\begin{cases} u = \sqrt{5^x - 2x} \\ v = \sqrt{2x + 1} \end{cases}, \text{ điều kiện } u, v \ge 0$$

ta biến đổi được phương trình về dạng:

$$u - v = v^4 - u^4 \Leftrightarrow (u - v)(u^3 + u^2v + uv^2 + v^3 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow u - v = 0 \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow \sqrt{5^x - 2x} = \sqrt{2x + 1} \Leftrightarrow 5^x - 2x = 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow 5^x + (1 - 5)x = 1 \overset{\text{Bernouli}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right. .$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 0 và x = 1.

Bài tập 38.

a. Đặt:

$$\begin{cases} a = 2^x \\ b = 4^x \end{cases}, \text{ điều kiện } a, b > 0.$$

Khi đó phương trình có dạng:

$$\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} + \frac{1}{a+b} = \frac{3}{2}.$$

Nhận xét rằng:

$$VT = \left(\frac{a}{b+1} + 1\right) + \left(\frac{b}{a+1} + 1\right) + \left(\frac{1}{a+b} + 1\right) - 3 = \frac{a+b+1}{b+1} + \frac{a+b+1}{a+1} + \frac{a+b+1}{a+b} - 3$$

$$= (a + b + 1)\left(\frac{1}{b+1} + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+b}\right) - 3$$

$$= \frac{1}{2}[(b + 1) + (a + 1) + (a + b)]\left(\frac{1}{b+1} + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+b}\right) - 3$$

$$\overset{\text{Côsi}}{\geq} \frac{1}{2}.3\sqrt[3]{(b+1)(a+1)(a+b)}.\frac{3}{\sqrt[3]{(b+1)(a+1)(a+b)}} - 3 = \frac{3}{2}.$$

Vậy phương trình tương đương với:

$$b + 1 = a + 1 = a + b \Leftrightarrow a = b = 1 \Leftrightarrow 2^x = 4^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất x = 0.

Nhận xét: Rất nhiều học sinh nhầm tưởng rằng có thể giải bài toán bằng cách sử dụng ẩn phụ $t=2^x$, xong nên nhớ khi đó ta sẽ nhận được một phương trình bậc 6 theo ẩn t.

b. x = 0.

c. x = 0.

Bài tập 39.

a. Viết lại phương trình dưới dạng:

$$3^x + (1 - 3)x = 1 \overset{\text{Bernouli}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right. .$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 0 và x = 1.

b. Viết lại phương trình dưới dạng:

$$3^{3x^2-2x} = 6x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow 3^{3x^2-2x} + (1-3)(3x^2-2x) = 1$$

$$\overset{\text{Bernoulli}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} 3x^2 - 2x = 0 \\ 3x^2 - 2x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2/3 \\ x = 1 \\ x = -1/3 \end{array}\right..$$

Vậy phương trình có bốn nghiệm $x = 0$, $x = \frac{2}{3}$, $x = 1$ và $x = -\frac{1}{3}$.

c. Theo bất đẳng thức Bernouli ta có:

- Với $x \ge 1$ hoặc $x \le 0$

$$\begin{cases} 3^x \ge 2x + 1 \\ 5^x \ge 4x + 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow 3^x + 5^x \ge 6x + 2$, dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 0 \vee x = 1$.

- Với $x \in (0, 1)$

$$\begin{cases} 3^x < 2x + 1 \\ 5^x < 4x + 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow 3^x + 5^x < 6x + 2 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 0$ và $x = 1$.

d. $x = 0$ và $x = 1$.

e. Theo bất đẳng thức Bernouli ta có:

- Với $x \ge 1$

$$\begin{cases} 9^{|x|} = 9^x \ge 8x + 1 \\ 3^{|x|} = 3^x \ge 2x + 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow 9^{|x|} + 3^{|x|} \ge 10x + 2$, dấu "đẳng thức xảy ra khi $x = 1$.

- Với $x \le 0$

$$\begin{cases} 9^{|x|} = 9^{-x} \ge -8x + 1 \ge 8x + 1 \\ 3^{|x|} = 3^{-x} \ge -2x + 1 \ge 2x + 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow 9^{|x|} + 3^{|x|} \ge 10x + 2$, dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 0$.

- Với $x \in (0, 1)$

$$\begin{cases} 9^{|x|} = 9^x < 8x + 1 \\ 3^{|x|} = 3^x < 2x + 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow 9^{|x|} + 3^{|x|} < 10x + 2 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 0$ và $x = 1$.

f. Vì $0 \le \sin^2 x, \cos^2 x \le 1$ nên:

$$\begin{cases} 2^{\sin^2 x} \le \sin^2 x + 1 \\ 2^{\cos^2 x} \le \cos^2 x + 1 \end{cases} \Rightarrow 2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} \le 3,$$

dấu đẳng thức xảy ra khi:

$$\begin{cases} \sin^2 x = 0 \vee \sin^2 x = 1 \\ \cos^2 x = 0 \vee \cos^2 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin^2 x = 0 \\ \sin^2 x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

CHỦ ĐỀ 2

BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa: Bất phương trình mũ là bất phương trình chứa ẩn ở số mũ của luỹ thừa.

II. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Bài toán 1: Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta sử dụng các phép biến đổi tương đương sau:

Dạng 1: Với bất phương trình:

$$a^{f(x)} < a^{g(x)}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \end{array}\right. \text{ hoặc } \begin{cases} a > 0 \\ (a-1)[f(x) - g(x)] < 0 \end{cases}.$$

Dạng 2: Với bất phương trình:

$$a^{f(x)} \le a^{g(x)}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \\ a = 1 \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \end{array}\right. \text{ hoặc } \begin{cases} a > 0 \\ (a-1)[f(x) - g(x)] \le 0 \end{cases}.$$

Chú ý: Cần lưu ý tới giá trị của cơ số a đối với các bất phương trình mũ.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 1. Giải các bất phương trình sau:

a. $\dfrac{1}{2^{|2x+1|}} \ge \dfrac{1}{2^{3x+1}}$.

☐ $x \ge 0$. ☐ $x \ge 2$. ☐ $x \le 1$. ☐ $0 \le x \le 1$.

b. $\dfrac{1}{2^{\sqrt{x^2-2x}}} \le 2^{x-1}$.

☐ $x \le 0$. ☐ $x \ge 2$. ☐ $x \le -1$. ☐ $0 \le x \le 2$.

Bài tập 2. Giải các bất phương trình sau:

a. $(x^2-3)^{x^2+2x} > |3-x^2|^8$.

☐ $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

☐ $(-\infty, -4) \cup (-2, +\infty)$.

☐ $(-4, -2) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

☐ $(-\infty, -4) \cup (-2, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty) \setminus \{2\}$.

b. $(x^2-1)^{x^2+2x} > |x^2-1|^3$.

☐ $(-1, 1)$.

☐ $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

☐ $(-3, -1) \cup (1, 3)$.

☐ $(-\infty, -3) \cup (-\sqrt{2}, -1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.

Bài tập 3. Giải các bất phương trình sau:

a. $(x^2+2x+1)^{\frac{x-1}{x+1}} \ge 1$.

☐ $\mathbf{R}\setminus\{1\}$.
☐ $[-1, 1]$.

☐ $(-\infty, -2] \cup (-1, 0] \cup (1, +\infty)$.
☐ $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

b. $\sqrt[4]{x^x} \le x^{\sqrt[4]{x}}$.

☐ $(-\infty, 1] \cup [4\sqrt[3]{4}, +\infty)$.
☐ $(0, 1)$.

☐ $[1, 4\sqrt[3]{4}]$.
☐ $[1, 4\sqrt{2}]$.

Bài tập 4. Cho bất phương trình:

$$2^{m^2x+1} \ge 2^{m+(3m-2)x}.$$

a. Giải bất phương trình với m = 2.

☐ $[0, 1]$. ☐ $[1, +\infty)$. ☐ Mọi x. ☐ Vô nghiệm.

b. Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

☐ $m = -1$. ☐ $m = 1$. ☐ $m = 2$. ☐ Vô nghiệm.

c. Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in [0, 1]$.

☐ $m \le 1$. ☐ $m = 2$. ☐ $m \ge 0$. ☐ $2 \le m \le 4$.

Bài tập 5. Cho bất phương trình:

$$(\sqrt{2}-1)^{(m+1)x^2+3m} \le (\sqrt{2}+1)^{2(1-m)x-3}.$$

a. Giải bất phương trình với m = 0.

☐ $[-3, 1]$.
☐ $[-1, 3]$.

☐ $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$.
☐ $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$.

b. Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

☐ $m \le 0$. ☐ $m \ge 1$. ☐ $m = 2$. ☐ $-1 \le m \le 4$.

Bài tập 6. Giải và biện luận bất phương trình:

$$(m+3)^{-4x^2+m\sqrt{1+m}} < (m^2+6m+9)^{(m+\sqrt{1-m})x}.$$

Bài toán 2: Phương pháp logarit hoá và đưa về cùng cơ số.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để chuyển ẩn số khỏi số mũ luỹ thừa người ta có thể logarit theo cùng một cơ số cả hai vế của bất phương trình mũ. Chúng ta lưu ý các trường hợp cơ bản sau cho các bất phương trình mũ:

Dạng 1: Với bất phương trình:

$$a^{f(x)} < b \text{ (với } b > 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ f(x) < \log_a b \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > \log_a b \end{cases} \end{array}\right..$$

Dạng 2: Với bất phương trình:

$$a^{f(x)} > b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b \le 0 \\ f(x) \text{ có nghĩa} \end{cases} \\ \begin{cases} b > 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > \log_a b \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) < \log_a b \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right..$$

Dạng 3: Với bất phương trình:

$$a^{f(x)} > b^{g(x)} \Leftrightarrow \lg a^{f(x)} > \lg b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x).\lg a > g(x).\lg b$$

hoặc có thể sử dụng logarit theo cơ số a hay b.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tạp 7. Giải bất phương trình:

$$3^{x^2-4x} < \frac{5}{3}.$$

☐ $(-2, 2)$. ☐ $(\log_5 3, \log_3 5)$.

☐ $(2-\sqrt{3+\log_3 5}, 2+\sqrt{3+\log_3 5})$. ☐ $(\sqrt{3-\log_3 5}, \sqrt{3+\log_3 5})$.

Bài tập 8. Giải các bất phương trình:

a. $7.3^{x+1} + 5^{x+3} \le 3^{x+4} + 5^{x+2}$.

☐ $x \le -1$. ☐ $x \ge -2$. ☐ $x \le -3$. ☐ $x \ge -4$.

b. $6^{2x+3} < 2^{x+7}.3^{3x-1}$.

☐ $x > 4$. ☐ $x > -7$. ☐ $x > -\frac{3}{2}$. ☐ $x > \frac{1}{3}$.

Bài toán 3: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 1.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Mục đích chính của phương pháp này là chuyển các bài toán đã cho về bất phương trình đại số quen biết đặc biệt là các bất phương trình bậc 2 hoặc các hệ bất phương trình.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 9. Giải các bất phương trình:

a. $\dfrac{2^{1-x} - 2^x + 1}{2^x - 1} \le 0$.

☐ $(0, 1]$. ☐ $(-\infty, 0) \cup [1, 8]$.

☐ $(-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$. ☐ $(0, 1] \cup [2, 6]$.

b. $9^{\sqrt{x^2-3}-1} + 3 < 28.\ 3^{\sqrt{x^2-3}-1}$.

☐ $|x| \le \sqrt{3}$. ☐ $|x| \ge \sqrt{3}$. ☐ $\sqrt{3} \le x \le 2$. ☐ Vô nghiệm.

c. $\frac{4}{3}.\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} - \left(\frac{1}{9}\right)^x > 4^{\frac{1}{2}\log_2 3}$.

☐ $(-1, 0)$. ☐ $(1, 2)$.

☐ $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$. ☐ $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$.

d. $\sqrt{9^x - 3^{x+2}} > 3^x - 9$.

☐ $x > 2$. ☐ $x \ge 3$. ☐ $x < 1$. ☐ $x \le 4$.

Bài tập 10. Giải các bất phương trình:

a. $25^{1+2x-x^2} + 9^{1+2x-x^2} \ge 34.15^{2x-x^2}$.

☐ $(1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$.

☐ $[-3, 0] \cup [1, 3]$.

☐ $(-\infty, 1 - \sqrt{3}] \cup [0, 2] \cup [1 + \sqrt{3}, +\infty)$.

☐ $(-\infty, -3] \cup [0, 1] \cup [3, +\infty)$.

b. $8.3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} + 9^{1+\sqrt[4]{x}} > 9^{\sqrt{x}}$.

☐ $(-\infty, 0] \cup (16, +\infty)$. ☐ $[0, +\infty)$.

☐ $[0, 16)$. ☐ $[0, 1) \cup (2, 4) \cup (6, +\infty)$.

c. $(5 + \sqrt{21})^x + (5 - \sqrt{21})^x \le 2^{x+\log_2 5}$.

☐ $[-1, 0]$. ☐ $[0, 1]$. ☐ $[-1, 1]$. ☐ $[0, +\infty)$.

d. $2^{2\sqrt{x+3}-x-6} + 15.\ 2^{\sqrt{x+3}-5} < 2^x$.

☐ $[-3, -1)$. ☐ $[-3, 1)$. ☐ $(-3, +\infty)$. ☐ $(1, +\infty)$.

Bài tập 11. Giải các bất phương trình:

a. $3^{2x} - 8.3^{x+\sqrt{x+4}} - 9.9^{\sqrt{x+4}} > 0$.

☐ $[-4, 0)$. ☐ $[-4, 1)$. ☐ $(-4, +\infty)$. ☐ $(5, +\infty)$.

b. $\sqrt{3^x+1} \le 3^{\frac{x}{2}} + \dfrac{2}{\sqrt{3^x+1}}$.

☐ $x > 2$. ☐ $x < 1$. ☐ Mọi x. ☐ Vô nghiệm.

c. $5^x + \dfrac{2.5^x}{\sqrt{5^{2x}-4}} > 3\sqrt{5}$.

☐ $(\log_5 2, +\infty)$. ☐ $(\log_2 5, 3) \cup (\log_2 10, +\infty)$.

☐ $(\log_5 2, \frac{1}{2}) \cup (\log_5 \sqrt{20}, +\infty)$. ☐ $(\frac{1}{2}, 1) \cup (\log_5 \sqrt{20}, +\infty)$.

Bài tập 12. Tìm m để bất phương trình:

$$9^x - 2(m + 1)3^x - 2m - 3 > 0 \text{ với } \forall x \in \mathbf{R}.$$

☐ $m > 2$. ☐ $m > 4$. ☐ $m < -\frac{1}{2}$. ☐ $m < -\frac{3}{2}$.

Bài tập 13. Cho:

$$f(x) = \frac{-x^2 + 3x - 3}{(m-1).2^{\cos^2 x} + 2^{1+\sin^2 x} + 2m}.$$

Tìm m để $f(x) < 0$ với mọi x.

☐ $m > 0$. ☐ $m \ge -3$. ☐ $m < 2$. ☐ $m \le 1$.

Bài tập 14. Cho bất phương trình:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}} > 12. \qquad (*)$$

a. Giải bất phương trình (*).

☐ $(-1, 0)$. ☐ $(-\infty, -1)$. ☐ $(0, +\infty)$. ☐ Mọi x.

b. Xác định m để mọi nghiệm của (*) cũng là nghiệm của bất phương trình $2x^2 + (m + 2)x + 2 - 3m < 0$.

☐ $m > 2$. ☐ $m < 1$. ☐ $m \ge \frac{2}{3}$. ☐ $m < \frac{1}{2}$.

Bài tập 15. Cho bất phương trình:

$$4^{x-1} - m(2^x + 1) > 0.$$

a. Giải bất phương trình khi $m = \frac{16}{9}$.

☐ $x > 3$. ☐ $x < 0$. ☐ $0 < x < 3$. ☐ Vô nghiệm.

b. Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

☐ $m > 1$. ☐ $m \le 0$. ☐ $0 \le m \le \frac{1}{2}$. ☐ $m > \frac{1}{2}$.

Bài tập 16. Xác định m để bất phương trình sau nghiệm đúng với $\forall x \in [0, 1]$:

$$m.9^x - (2m + 1).6^x + m.4^x \le 0$$

☐ $m \le 6$. ☐ $m \ge 0$. ☐ $0 \le m \le 6$. ☐ $m \ge \frac{2}{3}$.

Bài toán 4: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 2.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ý tưởng của phương pháp này cũng giống như phương trình mũ.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 17. Giải các bất phương trình:

a. $4^x - 2^{x+1} + 4^{x^2} \le 0$.

☐ $x = -1$. ☐ $x = 0$. ☐ $x = 1$. ☐ $x = 4$.

b. $4^{x^2+1}.3^{2x} - 4.3^x + 1 \le 0$.

☐ $x = 0$. ☐ $x = 1$. ☐ Mọi x. ☐ Vô nghiệm.

Bài tập 18. Giải bất phương trình:

$$9^x + 2(x - 2).3^x + 2x - 5 > 0.$$

☐ $x > 0$. ☐ $x > 1$. ☐ Mọi x. ☐ Vô nghiệm.

Bài tập 19. Giải bất phương trình:

$$4^{x^2} + (x^2 - 3).2^{x^2} - 2x^2 + 2 > 0.$$

☐ $x > 0$. ☐ $|x| > 1$. ☐ Mọi x. ☐ Vô nghiệm.

Bài tập 20. Giải bất phương trình:

$$4^x - (x + 3).2^x + 2(x + 1) \ge 0.$$

☐ $x \ge 0$. ☐ $0 \le x \le 1$. ☐ Mọi x. ☐ Vô nghiệm.

Bài toán 5: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 3.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ý tưởng của phương pháp này cũng giống như phương trình mũ.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 21. Giải các bất phương trình sau

a. $6^x + 2^{x+2} \le 4.3^x + 2^{2x}$.

☐ $[0, 2]$. ☐ $(-\infty, 0] \cup [1, 2] \cup [4, +\infty)$.

☐ $\mathbf{R} \setminus [0, 2]$. ☐ $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$.

b. $6^x - 2.3^x - 3.2^x + 6 \ge 0$.

☐ $x \ge 0$. ☐ $x \le 1$. ☐ Mọi x. ☐ Vô nghiệm.

Bài tập 22. Giải bất phương trình:

$$9^x - 3^{x+2} - 3^{x^2+x} + 3^{x^2+2} \ge 0.$$

☐ $(-\infty, 0] \cup [1, 2]$. ☐ $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$.

☐ $[0, 1] \cup [2, +\infty)$. ☐ Mọi x.

Bài tập 23. Giải bất phương trình:

$$2^{x^2+\sqrt{x-1}-1} + 2 \le 2^{x^2} + 2^{\sqrt{x-1}}.$$

☐ $[1, 2]$. ☐ $[2, +\infty)$. ☐ $(-\infty, 1]$ ☐ Vô nghiệm.

Bài tập 24. Giải bất phương trình:

$$\sqrt{5^x - 1} + 5^x - 3 \ge \sqrt{5^{2x+\log_5 2} - 2.5^{x+1} + 16}.$$

☐ $0 \le x \le 1$. ☐ $x \ge 0$. ☐ $x = 1$. ☐ Vô nghiệm.

Bài toán 6: Sử dụng tính chất đơn điệu của hàm số.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 25. Giải các bất phương trình:

a. $2^x + 3^x + 1 > 6^x$.

☐ $x > 1$. ☐ $x < 1$. ☐ $0 < x < 1$. ☐ $1 < x < 2$.

b. $3^{\sqrt{x+4}} + 2^{\sqrt{2x+4}} > 13$.

☐ $x \geq -4$. ☐ $x \leq 1$. ☐ $x > 0$. ☐ $-4 \leq x < 0$.

c. $(5 - \sqrt{21})^x + 7(5 + \sqrt{21})^x > 8$.

☐ $x > 0$. ☐ $0 < x < 1$. ☐ Mọi x. ☐ Vô nghiệm.

d. $3^{\sqrt{2(x-1)+1}} - 3^x \leq x^2 - 4x + 3$.

☐ $x \geq 1$. ☐ $x \geq 3$. ☐ $x > 4$. ☐ $1 \leq x \leq 2$.

Bài tập 26. Giải bất phương trình:

$$\frac{2^x - 1}{3^x - 2x - 1} \geq 0.$$

☐ $x > 1$. ☐ $x < 0$. ☐ $x \neq 0$. ☐ Mọi x.

Bài toán 7: Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 27. Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm duy nhất:

a. $\frac{1}{2^{|x|}} \geq 1 + m^2$.

☐ $m = 0$. ☐ $m = 1$. ☐ $m = -1$. ☐ Vô nghiệm.

b. $2^{|x-1|} > 1 + m^2$.

☐ $m = -1$. ☐ $m = 0$. ☐ $m = 1$. ☐ Vô nghiệm.

Bài tập 28. Tìm m để tập nghiệm của bất phương trình sau chứa đoạn $[-2, 0]$:

$$\sqrt{2^{2x} - m2^{x+1}} > 1 - 2^x.$$

☐ $m < -1$. ☐ $m > 1$. ☐ $0 < m < 1$. ☐ $m > 2$.

Bài toán 8: Sử dụng phương pháp đánh giá.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 29. Giải các bất phương trình sau:

a. $4^{\sin^2 \pi x} + 3.4^{\cos^2 \pi x} \leq 8$.

b. $4^{x^2+x+1} - 2^{x+2} + 1 \leq 0$.

Bài tập 30. Cho bất phương trình:

$$2^{x^2} + 2^{\sin^2 x} \leq 1 + \sqrt{1 - m^2}$$

a. Giải bất phương trình khi m = 0.

b. Giải và biện luận bất phương trình theo m.

III. HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$2^{|2x+1|} \le 2^{3x+1} \Leftrightarrow |2x+1| \le 3x+1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1 \ge 0 \\ -(3x+1) \le 2x+1 \le 3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{3} \\ x \ge 0 \\ x \ge -\dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 0.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x \ge 0$.

b. Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\frac{1}{2^{\sqrt{x^2-2x}}} \le 2^{x-1} \Leftrightarrow 2^{-\sqrt{x^2-2x}} \le 2^{x-1} \Leftrightarrow -\sqrt{x^2-2x} \le x-1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x} \ge 1-x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1-x \le 0 \\ x^2-2x \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1-x > 0 \\ x^2-2x \ge (1-x)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \ge 2.$$

Bài tập 2.

a. Điều kiện:

$x^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow |x| > \sqrt{3}$. (1)

Với điều kiện (1) bất phương trình có dạng:

$$(x^2-3)^{x^2+2x} > (x^2-3)^8 \Leftrightarrow (x^2-3-1)(x^2+2x-8) > 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-4)(x^2+2x-8) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < x \ne 2 \\ x < -4 \end{array}\right. \xRightarrow{(1)} \left[\begin{array}{l} \sqrt{3} < x \ne 2 \\ -2 < x < -\sqrt{3} \\ x < -4 \end{array}\right..$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $(-\infty, -4) \cup (-2, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty) \setminus \{2\}$.

b. Điều kiện:

$x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow |x| > 1$. (2)

Với điều kiện (2) bất phương trình có dạng:

$$(x^2-1)^{x^2+2x} > (x^2-1)^3 \Leftrightarrow (x^2-1-1)(x^2+2x-3) > 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2)(x^2+2x-3) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} < x < 1 \\ x < -3 \end{array}\right. \xRightarrow{(2)} \left[\begin{array}{l} x > \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} < x < -1 \\ x < -3 \end{array}\right..$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $(-\infty, -3) \cup (-\sqrt{2}, -1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.

Bài tập 3.

a. $(-\infty, -2] \cup (-1, 0] \cup (1, +\infty)$.

b. Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$x^{\frac{x}{4}} \le x^{\sqrt[4]{x}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1 \\ \frac{x}{4} < \sqrt[4]{x} \end{cases} \\ x = 1 \\ \begin{cases} 0 < x < 1 \\ \frac{x}{4} \ge \sqrt[4]{x} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 1 \le x \le 4\sqrt[3]{4}.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $1 \le x \le 4\sqrt[3]{4}$.

Bài tập 4. Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$m^2x + 1 \ge m + (3m - 2)x \Leftrightarrow f(x) = (m^2 - 3m + 2)x + 1 - m \ge 0. \quad (1)$$

a. Vô nghiệm.

b. Bất phương trình nghiệm đúng với mọi x

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 = 0 \\ 1 - m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

c. Bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in [0, 1]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(0) \ge 0 \\ f(1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m \ge 0 \\ m^2 - 4m + 3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \le 1.$$

Bài tập 5. Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$(\sqrt{2} - 1)^{(m+1)x^2+3m} \le (\sqrt{2} - 1)^{2(m-1)x+3} \Leftrightarrow (m + 1)x^2 + 3m \ge 2(m - 1)x + 3$$

$$\Leftrightarrow f(x) = (m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + 3m - 3 \ge 0.$$

a. $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$.

b. Ta xét các trường hợp:

- Với $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$, ta có:

  $f(x) = 4x - 6$, do đó không thể có $f(x) \ge 0$ với mọi x.

- Với $m + 1 \ne 0 \Leftrightarrow m \ne -1$.

  Khi đó, để $f(x) \ge 0$ với mọi x điều kiện là:

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 > 0 \\ 2(m - 1)(m + 2) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 1.$$

Vậy, với $m \ge 1$ bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Bài tập 6. Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$(m+3)^{4x^2+m\sqrt{1+m}} < (m+3)^{2(m+\sqrt{1+m})x}.$$

Trường hợp 1. Nếu $1+m<0 \Leftrightarrow m<-1$ thì bất phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2. Nếu $1+m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -1$.

Khi đó $m+3>1$, nên bất phương trình tương đương với:

$$4x^2+m\sqrt{1+m} < 2(m+\sqrt{1+m})x$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 4x^2-2(m+\sqrt{1+m})x+m\sqrt{1+m}<0.$$

Ta đi tính biệt thức $\Delta' = (m+\sqrt{1+m})^2-4m\sqrt{1+m} = (m-\sqrt{1+m})^2$.

Xét hai khả năng:

a. Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m-\sqrt{1+m}=0 \Leftrightarrow \sqrt{1+m}=m \Leftrightarrow m=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Bất phương trình vô nghiệm.

b. Nếu $\Delta'>0 \Leftrightarrow m-\sqrt{1+m}\neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+m}\neq m \Leftrightarrow m\neq\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Khi đó $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt là: $x_1=\dfrac{\sqrt{1+m}}{2}$ và $x_2=\dfrac{m}{2}$.

- Nếu $x_1<x_2$, tức là:

$$\frac{\sqrt{1+m}}{2}<\frac{m}{2} \Leftrightarrow \sqrt{1+m}<m \Leftrightarrow \begin{cases} m\geq 0 \\ 1+m<m^2 \end{cases} \Leftrightarrow m>\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

  Bất phương trình có nghiệm $x_1<x<x_2$.

- Nếu $x_1>x_2$, tức là $-1\leq m<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

  Bất phương trình có nghiệm $x_2<x<x_1$.

Kết luận:

- Với $m<-1$ hoặc $m=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, bất phương trình vô nghiệm.
- Với $m>\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, bất phương trình có nghiệm $\dfrac{\sqrt{1+m}}{2}<x<\dfrac{m}{2}$.
- Với $-1\leq m<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, bất phương trình có nghiệm $\dfrac{m}{2}<x<\dfrac{\sqrt{1+m}}{2}$.

Bài tập 7. Lấy logarit cơ số 3 hai vế bất phương trình, ta được:

$$\log_3 3^{x^2-4x}<\log_3\frac{5}{3} \Leftrightarrow x^2-4x<\log_3 5-1 \Leftrightarrow x^2-4x+1-\log_3 5<0,$$

ta có $\Delta' = 4-1+\log_3 5 = 3+\log_3 5>0$ suy ra bất phương trình có nghiệm:

$$2-\sqrt{3+\log_3 5}<x<2+\sqrt{3+\log_3 5}.$$

Bài tập 8.

a. Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$7.3^{x+1}+25.5^{x+1}\le 27.3^{x+1}+5.5^{x+1}\Leftrightarrow 5^{x+1}\le 3^{x+1}\Leftrightarrow\left(\frac{5}{3}\right)^{x+1}\le 1\Leftrightarrow x\le -1.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x\le -1$.

b. Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$(2.3)^{2x+3}<2^{x+7}.3^{3x-1}\Leftrightarrow 2^{2x+3}.3^{2x+3}<2^{x+7}.3^{3x-1}\Leftrightarrow 2^{x-4}<3^{x-4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2^{x-4}}{3^{x-4}}<1\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^{x-4}<1\Leftrightarrow x-4>0\Leftrightarrow x>4.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $x>4$.

Bài tập 9.

a. Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$\frac{\frac{2}{2^x}-2^x+1}{2^x-1}\le 0.$$

Đặt $t=2^x$, điều kiện $t>0$. Khi đó, bất phương trình có dạng:

$$\frac{\frac{2}{t}-t+1}{t-1}\le 0\Leftrightarrow\frac{-t^2+t+2}{t(t-1)}\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<t<1\\ t\ge 2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<2^x<1\\ 2^x\ge 2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<0\\ x\ge 1\end{array}\right..$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$.

b. Vô nghiệm.

c. Đặt $t=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, điều kiện $t>0$. Khi đó, bất phương trình có dạng:

$$4t-t^2>2^{\log_2 3}\Leftrightarrow t^2-4t+3<0\Leftrightarrow 1<t<3\Leftrightarrow 1<\left(\frac{1}{3}\right)^x<3$$

$$\Leftrightarrow 1<3^{-x}<3\Leftrightarrow 0<-x<1\Leftrightarrow -1<x<0.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $-1<x<0$.

d. $x>2$.

Bài tập 10.

a. Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$25.\,25^{2x-x^2}+9.\,9^{2x-x^2}\ge 34.\,(3.5)^{2x-x^2}$$

$$\Leftrightarrow 5.\,5^{2(2x-x^2)}+9.\,3^{2(2x-x^2)}\ge 34.\,3^{2x-x^2}.\,5^{2x-x^2}$$

Chia hai vế của bất phương trình cho $3^{2(2x-x^2)} > 0$,ta được:

$$25\left(\frac{5}{3}\right)^{2(2x-x^2)} + 9 \geq 34\left(\frac{5}{3}\right)^{2x-x^2} \Leftrightarrow 25\left(\frac{5}{3}\right)^{2(2x-x^2)} - 34\left(\frac{5}{3}\right)^{2x-x^2} + 9 \geq 0.$$

Đặt $t = \left(\frac{5}{3}\right)^{2x-x^2}$, điều kiện $0 < t \leq \frac{5}{3}$ (bởi $2x - x^2 \leq 1$). (*)

Khi đó, bất phương trình có dạng:

$$25t^2 - 34t + 9 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \geq 1 \\ t \leq 9/25 \end{array}\right. \overset{(*)}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{l} 1 \leq t \leq \frac{5}{3} \\ 0 < t \leq \frac{9}{25} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \leq \left(\frac{5}{3}\right)^{2x-x^2} \leq \frac{5}{3} \\ 0 < \left(\frac{5}{3}\right)^{2x-x^2} \leq \left(\frac{5}{3}\right)^{-2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq 2x - x^2 \leq 1 \\ 2x - x^2 \leq -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 2 \\ x \geq 1 + \sqrt{3} \\ x \leq 1 - \sqrt{3} \end{array}\right.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $(-\infty, 1 - \sqrt{3}\,] \cup [0, 2] \cup [1+\sqrt{3}, +\infty)$.

b. Với điều kiện $x \geq 0$, ta viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$8.3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} + 9.3^{2\sqrt[4]{x}} > 3^{2\sqrt{x}}.$$

Chia hai vế của bất phương trình cho $3^{2\sqrt[4]{x}} > 0$,ta được:

$$8.3^{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}} + 9 > 3^{2(\sqrt{x}-\sqrt[4]{x})}.$$

Đặt $u = \sqrt[4]{x}$, $u \geq 0$ và $t = 3^{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}} = 3^{u^2-u}$, $t > 0$.

Khi đó, bất phương trình có dạng:

$$8t + 9 > t^2 \Leftrightarrow t^2 - 8t - 9 < 0 \Leftrightarrow -1 < t < 9 \Rightarrow 3^{u^2-u} < 9 \Leftrightarrow u^2 - u < 2$$

$$\Leftrightarrow -1 < u < 2 \Rightarrow \sqrt[4]{x} < 2 \Leftrightarrow x < 16.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $0 \leq x < 16$.

c. Chia hai vế bất phương trình cho $2^x > 0$, ta được:

$$\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^x + \left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^x \leq 5.$$

Nhận xét rằng $\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right).\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right) = 1$, nên nếu đặt $t = \left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^x$,

điều kiện $t > 0$ thì $\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^x = \frac{1}{t}$.

Khi đó, bất phương trình có dạng:

$$t + \frac{1}{t} \le 5 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 1 \le 0 \Leftrightarrow \frac{5-\sqrt{21}}{2} \le t \le \frac{5+\sqrt{21}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5-\sqrt{21}}{2} \le \left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^x \le \frac{5+\sqrt{21}}{2} \Leftrightarrow -1 \le x \le 1.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $[-1, 1]$.

d. Điều kiện:

$$x + 3 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -3.$$

Chia hai vế bất phương trình cho $2^x \ne 0$, ta được:

$$2^{2\sqrt{x+3}-2x-6} + 15.2^{\sqrt{x+3}-x-5} < 1 \Leftrightarrow 4.2^{2(\sqrt{x+3}-x-3)} + 15.2^{\sqrt{x+3}-x-3} - 4 < 0.$$

Đặt $t = 2^{\sqrt{x+3}-x-3}$, điều kiện $t > 0$.

Khi đó, bất phương trình có dạng:

$$\Leftrightarrow 4t^2 + 15t - 4 < 0 \Leftrightarrow (t+4)(4t-1) < 0 \xleftrightarrow{t>0} t < \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{\sqrt{x+3}-x-3} < \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3} - x - 3 < -2 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} < x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 > 0 \\ x + 3 < (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $(1, +\infty)$.

Bài tập 11.

a. Điều kiện:

$$x + 4 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -4.$$

Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$3^{2x} - 8.3^{x+\sqrt{x+4}} - 9.3^{2\sqrt{x+4}} > 0.$$

Chia hai vế bất phương trình cho $3^{2\sqrt{x+4}} > 0$, ta được:

$$3^{2(x-\sqrt{x+4})} - 8.3^{x-\sqrt{x+4}} - 9 > 0.$$

Đặt $t = 3^{x-\sqrt{x+4}}$, điều kiện $t > 0$, khi đó bất phương trình có dạng:

$$t^2 - 8t - 9 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t > 9 \\ t < -1 \text{ (l)} \end{array}\right. \Leftrightarrow 3^{x-\sqrt{x+4}} > 9 \Leftrightarrow x - \sqrt{x+4} > 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+4} < x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 > 0 \\ 0 \le x + 4 < (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 5.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x > 5$.

b. Đặt $3^{\frac{x}{2}} = \text{tgt}$, với $t \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \sqrt{3^x + 1} = \frac{1}{\cos t}$.

Khi đó, bất phương trình có dạng:

$$\frac{1}{\cos t} \le \text{tgt} + 2\cos t \Leftrightarrow 1 \le \sin t + 2\cos^2 t \Leftrightarrow 2\sin^2 t - \sin t - 1 \le 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le \sin t \le 1 \Leftrightarrow \text{tgt} \ge -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 3^{\frac{x}{2}} \ge -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ luôn đúng.}$$

Vậy, mọi x là nghiệm của bất phương trình.

c. Điều kiện:

$$5^{2x} - 4 > 0 \Leftrightarrow 5^{2x} > 4 \Leftrightarrow 2x > \log_5 4 \Leftrightarrow x > \log_5 2. \qquad (*)$$

Đặt $u = 5^x$, điều kiện $u > 2$, khi đó bất phương trình có dạng:

$$u + \frac{2u}{\sqrt{u^2 - 4}} > 3\sqrt{5}. \qquad (1)$$

Bình phương 2 vế bất phương trình (1) ta được :

$$u^2 + \frac{4u^2}{u^2 - 4} + \frac{4u^2}{\sqrt{u^2 - 4}} > 45 \Leftrightarrow \frac{u^4}{u^2 - 4} + 4.\frac{u^2}{\sqrt{u^2 - 4}} > 45 \qquad (2)$$

Đặt $t = \frac{u^2}{\sqrt{u^2 - 4}}$, điều kiện $t > 0$. Khi đó, bất phương trình (2) có dạng:

$$t^2 + 4t - 45 > 0 \Leftrightarrow t > 5 \Leftrightarrow \frac{u^2}{\sqrt{u^2 - 4}} > 5 \Leftrightarrow u^4 - 25u^2 + 100 > 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u^2 > 20 \\ u^2 < 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u > \sqrt{20} \\ u < \sqrt{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^x > \sqrt{20} \\ 5^x < \sqrt{5} \end{array}\right. \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x > \log_5 \sqrt{20} \\ \log_5 2 < x < \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $(\log_5 2, \frac{1}{2}) \cup (\log_5 \sqrt{20}, +\infty)$.

Bài tập 12. Đặt $t = 3^x$, điều kiện $t > 0$, khi đó bất phương trình có dạng:

$$f(t) = t^2 - 2(m + 1)t - 2m - 3 > 0, \forall t > 0 \qquad (2)$$

a có:

$$\Delta' = m^2 + 4m + 4 \ge 0 \text{ với mọi } m$$

Trường hợp 1. Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = -2$.

Khi đó (2) luôn đúng.

Trường hợp 2. Nếu $\Delta' > 0$.

Khi đó, điều kiện là phương trình $f(t) = 0$ có 2 nghiệm thoả mãn $t_1 < t_2 < 0$.

Tóm lại ta cần:

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ af(0) \geq 0 \\ S/2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ -2m - 3 > 0 \\ m + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \neq m < -\frac{3}{2}.$$

Vậy, với $m < -\frac{3}{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 13. Ta có $-x^2 + 3x - 3 < 0$, $\forall x$ vì $\Delta = -3 < 0$.

Do đó $f(x) < 0$, $\forall x$ khi và chỉ khi:

$$(m-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{-\cos^2 x} + 2^{1+\sin^2 x} + 2m > 0, \ \forall x \qquad (1)$$

Đặt $t = 2^{\sin^2 x}$, vì $0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq t \leq 2$, khi đó (1) có dạng:

$$t^2 + mt + m - 1 > 0, \ \forall t \in [1, 2] \Leftrightarrow (t+1)(t+m-1) > 0, \ \forall t \in [1, 2]$$

$$\Leftrightarrow g(t) = t + m - 1 > 0, \ \forall t \in [1, 2] \Leftrightarrow \begin{cases} g(1) > 0 \\ g(2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0.$$

Vậy, với $m > 0$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 14.

a. $-1 < x < 0$.

b. $m \geq \frac{2}{3}$.

Bài tập 15.

a. $x > 3$.

b. $m \leq 0$.

Bài tập 16. $m \leq 6$.

Bài tập 17.

a. Đặt $t = 2^x$, điều kiện $t > 0$.

Khi đó, bất phương trình có dạng:

$$t^2 - 2t + 4^{x^2} \leq 0 \qquad (*)$$

ta có $\Delta' = 1 - 4^{x^2} \leq 0$, do đó:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ t = -\dfrac{b}{2a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4^{x^2} = 0 \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{x^2} = 1 \\ 2^x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

b. Vô nghiệm.

Bài tập 18. Đặt $t = 3^x$, điều kiện $t > 0$, khi đó bất phương trình có dạng:

$$f(t) = t^2 + 2(x - 2)t + 2x - 5 > 0$$

ta có $\Delta' = (x - 3)^2$, do đó $f(t) = 0$ có hai nghiệm $t = -1 \vee t = 5 - 2x$.

Do đó, bất phương trình có dạng:

$$(t + 1)(t + 2x - 5) > 0 \overset{t>0}{\Rightarrow} t + 2x - 5 > 0 \Leftrightarrow g(t) = 3^x + 2x - 5 > 0. \quad (*)$$

Nhận xét rằng $g(t)$ là hàm số đồng biến và $g(1) = 0$ nên (*) tương đương với $x > 1$.

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x > 1$.

Bài tập 19. $|x| > 1$.

Bài tập 20. Đặt $t = 2^x$, điều kiện $t > 0$, khi đó bất phương trình có dạng:

$$f(t) = t^2 - (x + 3)t + 2(x + 1) \geq 0$$

ta có $\Delta = (x + 3)^2 - 8(x + 1) = (x - 1)^2$, do đó $f(t) = 0$ có hai nghiệm:

$$t = 2 \vee t = x + 1.$$

Do đó, bất phương trình có dạng:

$$(t - 2)(t - x - 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t - 2 \geq 0 \\ t - x - 1 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} t - 2 \leq 0 \\ t - x - 1 \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^x \geq 2 \\ 2^x \geq x + 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2^x \leq 2 \\ 2^x \leq x + 1 \end{cases} \end{array}\right. \overset{\text{Bernouli}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 0 \vee x \geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \geq 0.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x \geq 0$.

Bài tập 21.

a. Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$2^x.3^x + 4.2^x - 4.3^x - 2^{2x} \geq 0.$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = 3^x \\ v = 2^x \end{cases}, \text{ điều kiện } u, v > 0.$$

Khi đó, bất phương trình có dạng:

$$uv + 4v - 4u - v^2 \geq 0 \Leftrightarrow (u - v)(v - 4) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u - v \geq 0 \\ v - 4 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} u - v \leq 0 \\ v - 4 \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3^x \geq 2^x \\ 2^x \geq 4 \end{cases} \\ \begin{cases} 3^x \leq 2^x \\ 2^x \leq 4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 0 \\ x \leq 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \leq 0 \end{array}\right..$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$.

b. Bất phương trình nhận mọi x làm nghiệm.

Bài tập 22. $(-\infty, 0] \cup [1, 2]$.

Bài tập 23. Điều kiện $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$2^{\sqrt{x-1}-1}.2^{x^2} - 2^{x^2} - 2.2^{\sqrt{x-1}-1} + 2 \leq 0.$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = 2^{\sqrt{x-1}-1} \\ v = 2^{x^2} \end{cases}, \text{ điều kiện } u > 0 \text{ và } v \geq 2.$$

Khi đó, bất phương trình có dạng:

$$uv - v - 2u + 2 \leq 0 \Leftrightarrow (u-1)(v-2) \leq 0$$

$$\xleftrightarrow{v\geq 2} \left[\begin{array}{l} v = 2 \\ u - 1 \leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = 2 \\ u \leq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x^2} = 2 \\ 2^{\sqrt{x-1}-1} \leq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ \sqrt{x-1} - 1 \leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \leq 2.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $1 \leq x \leq 2$.

Bài tập 24. Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$\sqrt{5^x - 1} + 5^x - 3 \geq \sqrt{2.5^{2x} - 10.5^x + 16}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5^x - 1} + 5^x - 3 \geq \sqrt{2(5^x - 3)^2 + 2(5^x - 1)}$$

Điều kiện $5^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Đặt:

$$\begin{cases} u = \sqrt{5^x - 1} \geq 0 \\ v = 5^x - 3 \end{cases},$$

bất phương trình được biến đổi về dạng:

$$u + v \geq \sqrt{2u^2 + 2v^2} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v \geq 0 \\ (u+v)^2 \geq 2u^2 + 2v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v \geq 0 \\ (u-v)^2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow \sqrt{5^x - 1} = 5^x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x - 3 \geq 0 \\ 5^x - 1 = (5^x - 3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5^x \geq 3 \\ 5^{2x} - 7.5^x + 10 = 0 \end{cases} \overset{t = 5^x \geq 3}{\Leftrightarrow} t^2 - 7t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 5 \Leftrightarrow 5^x = 5 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x = 1$.

Bài tập 25.

a. Chia hai vế bất phương trình cho $6^x > 0$, ta được:

$$\frac{1}{3^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{6^x} > 1. \qquad (1)$$

Hàm số $f(x) = \frac{1}{3^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{6^x}$, là hàm nghịch biến.

Ta có:

- Với $x \ge 1$, $f(x) \le f(1) = 1$ do đó bất phương trình (1) vô nghiệm.
- Với $x < 1$, $f(x) > f(1) = 1$ do đó bất phương trình (1) nghiệm đúng.

Vậy, $x < 1$ là nghiệm của bất phương trình.

b. Điều kiện:

$$\begin{cases} x + 4 \ge 0 \\ 2x + 4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge -2. \qquad (1)$$

Các hàm số $f_1(x) = \sqrt{x+4}$ và $f_2(x) = \sqrt{2x+4}$ đồng biến trên miền $x \ge -2$

$\Rightarrow$ hàm số $f(x) = 3^{\sqrt{x+4}} + 2^{\sqrt{2x+4}}$ đồng biến trên miền $x \ge -2$.

Ta có $f(0) = 13$, do đó:

- Nếu $x > 0$ thì $f(x) > f(0) \Leftrightarrow 3^{\sqrt{x+4}} + 2^{\sqrt{2x+4}} > 13$, nên $x > 0$ là nghiệm.
- Nếu $-2 \le x \le 0$ thì $f(x) \le f(0) \Leftrightarrow 3^{\sqrt{x+4}} + 2^{\sqrt{2x+4}} \le 13$, nên $-2 \le x \le 0$ không phải là nghiệm.

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $x > 0$.

c. $x > 0$.

d. Điều kiện $x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1$.

Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$3^{\sqrt{2(x-1)}+1} + 2(x-1) \le 3^x + x^2 - 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow 3^{\sqrt{2(x-1)}+1} + 2(x-1) \le 3^{(x-1)+1} + (x-1)^2 \qquad (*)$$

Xét hàm số $f(x) = 3^{x+1} + x^2$, thấy ngay hàm số đồng biến trên $[1, +\infty)$.

Khi đó (*) được biến đổi như sau:

$$f(\sqrt{2(x-1)}) \le f(x-1) \Leftrightarrow \sqrt{2(x-1)} \le x - 1$$

$$\xleftrightarrow{x \ge 1} 2(x-1) \le (x-1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \ge 0 \xleftrightarrow{x \ge 1} x \ge 3.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $x \ge 3$.

Bài tập 26. $x > 1$.

Bài tập 27.

a. Kí hiệu bất phương trình ban đầu là (1).

Điều kiện cần: Giả sử (1) có nghiệm là $x = x_0$ suy ra $-x_0$ cũng là nghiệm của (1).

Vậy (1) có nghiệm duy nhất khi $x_0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0$.

Thay $x_0 = 0$ vào (1), ta được:

$$1 \ge 1 + m^2 \Leftrightarrow m^2 \le 0 \Leftrightarrow m = 0.$$

Đó chính là điều kiện cần để bất phương trình có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ: Giả sử m = 0, khi đó (1) có dạng:

$$\frac{1}{2^{|x|}} \geq 1 \Leftrightarrow 2^{|x|} \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

Vậy, với m = 0 phương trình có nghiệm duy nhất.

b. m = 0.

Bài tập 28. Đặt $t = 2^x$, điều kiện t > 0. Khi đó, với $x \in [-2, 0]$ thì:

$$\Leftrightarrow 2^{-2} \leq 2^x \leq 2^0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq t \leq 1,$$

do đó bài toán được phát biểu lại:

" *Tìm m để tập nghiệm của bất phương trình sau chứa đoạn* $[\frac{1}{4}, 1]$:

$$\sqrt{t^2 - 2mt} > 1 - t \text{ "} \qquad (1)$$

Điều kiện cần: Giả sử (1) có nghiệm $\forall t \in [\frac{1}{4}, 1] \Rightarrow t = \frac{1}{4}$ và t = 1 là nghiệm của (1), khi đó:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{m}{2}} > 1 - \frac{1}{4} \\ \sqrt{1 - 2m} > 1 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m < -1.$$

Đó chính là điều kiện cần để nghiệm của bất phương trình chứa $[\frac{1}{4}, 1]$.

Điều kiện đủ: Giả sử m < −1, khi đó viết lại (1) có dạng:

$$t - 1 + \sqrt{t^2 - 2mt} > 0.$$

Xét hàm số $y = t - 1 + \sqrt{t^2 - 2mt}$ trên đoạn $[\frac{1}{4}, 1]$ là hàm đồng biến

$$\Rightarrow y > y(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4} - 1 + \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{m}{2}} > \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow t - 1 + \sqrt{t^2 - 2mt} > 0.$$

Vậy, với m < − 1 nghiệm của bất phương trình chứa $[\frac{1}{4}, 1]$.

Chú ý: Cũng có thể không cần sử dụng phương pháp điều kiện cần vá đủ trong bài toán trên, cụ thể:

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$t^2 - 2mt > (1 - t)^2 \Leftrightarrow f(t) = 2(m - 1)t + 1 < 0 \qquad (*)$$

Vậy để nghiệm của bất phương trình chứa $[\frac{1}{4}, 1]$ điều kiện là:

$$\begin{cases} f(\frac{1}{4}) < 0 \\ f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m-1}{2} + 1 < 0 \\ 2(m-1) + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 < 0 \\ 2m - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1.$$

Vậy, với m < − 1 nghiệm của bất phương trình chứa $[\frac{1}{4}, 1]$.

CHỦ ĐỀ 3

HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Định nghĩa: Hệ phương trình mũ là hệ phương trình chứa ẩn số ở số mũ của luỹ thừa.

II. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Bài toán 1: Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt điều kiện cho các biểu thức trong hệ có nghĩa.

Bước 2: Sử dụng các phép thế để nhận được từ hệ một phương trình theo ẩn x hoặc y (đôi khi có thể là theo cả hai ẩn x, y).

Bước 3: Giải phương trình nhận được bằng các phương pháp đã biết.

Bước 4: Kết luận về nghiệm cho hệ phương trình.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 1. Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y} \\ x^2y = 1 \end{cases}$.

☐ $(1, 1)$ và $(\frac{1}{2}, 4)$.
☐ $(\frac{1}{2}, 4)$ và $(2, \frac{1}{4})$.
☐ $(2, \frac{1}{4})$ và $(\frac{1}{2}, 4)$.
☐ $(1, 1)$ và $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \sqrt[3]{9}\right)$.

b. $\begin{cases} x^{y+4x} = y^{5(y-\frac{x}{3})} \\ x^3 = y^{-1} \end{cases}$.

☐ $(1, 1)$ và $(3, \frac{1}{27})$.
☐ $(\frac{1}{2}, 8)$ và $(3, \frac{1}{27})$.
☐ $(\frac{1}{2}, 8)$ và $(2, \frac{1}{8})$.
☐ $(1, 1)$ và $(2, \frac{1}{8})$.

Bài tập 2. Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + a = 1 \\ 2^{a^2}.4^{x+y-xy} = 2 \end{cases}.$$

Bài tập 3. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2^x.3^y = 2m \\ 3^x.2^y = 3m \end{cases}.$$

a. Giải hệ phương trình với $m = 1$.

☐ $(1, 0)$. ☐ $(0, 1)$. ☐ $(1, 1)$. ☐ $(0, 0)$.

b. Tìm m để hệ có cặp nghiệm (x, y) thoả mãn $x = 2y$. Hãy chỉ ra cặp nghiệm đó.

☐ $m = 0$. ☐ $m = 2$. ☐ $m = 6$. ☐ Vô nghiệm.

Bài tập 4. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2^{x^2+4y^2} = 4.2^{m(x-2)-y} \\ mx - y - 2m - 2 = 0 \end{cases}.$$

a. Giải hệ phương trình với $m = -\frac{1}{2}$.

☐ $(0, -1)$ và $(2, 1)$. ☐ $(1, 1)$ và $(2, 1)$.

☐ $(1, 1)$ và $(-2, 0)$. ☐ $(0, -1)$ và $(-2, 0)$.

b. Tìm m để hệ phương trình có 2 cặp nghiệm phân biệt (x_1, y_1) và (x_2, y_2) thoả mãn $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \frac{32}{5}$.

☐ $m = -4$. ☐ $m = -1$. ☐ $m = 2$. ☐ Vô nghiệm.

Bài toán 2: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 5. Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} 3^{2x+2} + 2^{2y+2} = 17 \\ 2.3^{x+1} + 3.2^y = 8 \end{cases}$.

☐ $(-1, 1)$. ☐ $(1, -1)$. ☐ $(0, 2)$. ☐ $(2, 0)$.

b. $\begin{cases} 2^{2|x|+1} - 3.2^{|x|} = y^2 - 2 \\ 2y^2 - 3y = 2^{2|x|} - 2 \end{cases}$.

☐ $(0, 0)$, $(0, 1)$ và $(0, -1)$. ☐ $(-1, 2)$, $(2, 2)$ và $(1, 1)$.

☐ $(1, 2)$, $(2, 0)$ và $(1, -2)$. ☐ $(0, 1)$, $(1, 2)$ và $(-1, 2)$.

c. $\begin{cases} 9^{\log_2(xy)} - 3 = 2(xy)^{\log_2 3} \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 = 1 \end{cases}$.

☐ $(0, 0)$ và $(0, -1)$. ☐ $(-2, -1)$ và $(-1, 0)$.

☐ $(0, -1)$ và $(-1, -2)$. ☐ $(-1, -2)$ và $(-2, -1)$.

d. $\begin{cases} 2^{3x+1} + 2^{y-2} = 3.2^{y+3x} \\ \sqrt{3x^2 + 1 + xy} = \sqrt{x+1} \end{cases}$.

☐ $(0, 4)$ và $(0, \log_2 \frac{8}{11})$.

☐ $(0, 1)$ và $(3, \log_2 3)$.

☐ $(0, 2)$ và $(\frac{1}{3}[\log_2(3 + \sqrt{8}) - 1], 2 - \log_2(3 + \sqrt{8}))$.

☐ $(0, \log_2 \frac{8}{11})$ và $(\frac{1}{3}[\log_2(3 + \sqrt{8}) - 1], 2 - \log_2(3 + \sqrt{8}))$.

Bài tập 6. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3^x - 2^{y^2} = 77 \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y^2}{2}} = 7 \end{cases}.$$

☐ $(1, 2)$ và $(1, -2)$.

☐ $(2, 2\sqrt{3})$ và $(2, -2\sqrt{3})$.

☐ $(4, 0)$ và $(8, 2)$.

☐ $(4, \sqrt{2})$ và $(4, -\sqrt{2})$.

Bài tập 7. Giải và biện luận hệ phương trình:

a. $\begin{cases} 2^x + m.3^y = 3m \\ m.2^x + 3^y = 2m + 1 \end{cases}$.

b. $\begin{cases} 2^{2x} + y.2^{x+1} = m.2^x + y \\ y^2 + y.2^{x+1} = my + 2^x \end{cases}$.

Bài tập 8. Cho hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2^{2x} + 4^{2y} = m \\ 2^x + 4^y + 2^{x+2y} = m \end{cases}$$

a. Giải hệ với m = 1.

b. Tìm m để hệ có nghiệm

Bài tập 9. Giải và biện luận hệ phương trình :

$$\begin{cases} a^{2x} + a^{2y} = 2b \\ a^{x+y} = c \end{cases}.$$

Bài tập 10. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2^{\sqrt{x}+1} = y - \sqrt{y+1} + m + 1 \\ \sqrt{y+1} = 2^{2\sqrt{x}+2} - 2^{\sqrt{x}+1} + m \end{cases}.$$

a. Giải hệ phương trình với m = 0.

b. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm.

c. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Bài toán 3: Sử dụng tính chất đơn điệu của hàm số .

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 11. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2^x - 2^y = y - x \\ 2x^2 - 4mx - y^2 = 3m \end{cases}.$$

a. Giải hệ phương trình với $m = -1$.

☐ (1, 1) và (3, 3).
☐ (−1, 1) và (3, −3).
☐ (−1, −1) và (−3, −3).
☐ (1, −3) và (3, −1).

b. Tìm m để hệ có hai cặp nghiệm phân biệt.

Bài tập 12. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2^x = 2m^2 y \\ 2^y = 2m^2 x \end{cases}.$$

a. Giải hệ phương trình với $m = 1$.

☐ (1, 1) và (0, 0).
☐ (0, 0) và (2, 2).
☐ (−1, −1) và (2, 2).
☐ (1, 1) và (2, 2).

b. Tìm m để hệ vô nghiệm.

Bài tập 13. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3^x - 3^y = (y - x)(xy + m) \\ x^2 + y^2 = m \end{cases}.$$

a. Giải hệ phương trình với $m = 8$.

☐ (−1, −1) và (2, 2).
☐ (2, 2) và (−2, −2).
☐ (−1, 2) và (−2, 1).
☐ (−1, −1) và (1, 1).

b. Tìm m để hệ có nghiệm.

Bài tập 14. Giải và biện luận hệ phương trình :

$$\begin{cases} m^{\frac{x-y}{2}} - m^{\frac{x-y}{4}} = m^2 - m \\ n^{\frac{x+y}{3}} - n^{\frac{x+y}{6}} = n^2 - n \end{cases}.$$

Bài toán 4: Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 15. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + m \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}.$$

a. Giải hệ với m = 2.

☐ (0, −1) và (1, 0). ☐ (0, −1) và (1, 0).

☐ (0, −1) và (0, 1). ☐ (−1, 0) và (1, 0).

b. Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất

Bài tập 16. Tìm a để các hệ phương trình sau có nghiệm với mọi b:

a. $$\begin{cases} (x^2 + 1)^a + (b^2 + 1)^y = 2 \\ a + bxy + x^2y = 1 \end{cases}.$$

b. $$\begin{cases} 2^{bx} + (a + 1)by^2 = a^2 \\ (a - 1)x^3 + y^2 = 1 \end{cases}.$$

Bài toán 5: Sử dụng phương pháp đánh giá.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 17. Giải các hệ phương trình sau:

a. $$\begin{cases} 2^{\sin(x+y)\pi} = 1 \\ 2(x^2 + y^2) = 1 \end{cases}.$$

☐ $(1, -1)$ và $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. ☐ $(2, -2)$ và $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

☐ $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ và $(-1, 1)$. ☐ $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ và $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

b. $$\begin{cases} 3^{(x+y)^2} = \cos(x + y) \\ x^2 + 4y + 3 = 0 \end{cases}.$$

☐ (−1, −1) và (−3, −3). ☐ (1, −3) và (3, −1).

☐ (−1, 1) và (−3, 3). ☐ (1, −1) và (3, −3).

Bài tập 18. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2^{x+y} = x + y + 1 \\ x^2 + y = 2 \end{cases}.$$

III. HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. (1, 1) và $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \sqrt[3]{9}\right)$.

b. Ký hiệu hệ như sau:

$$\begin{cases} x^{y+4x} = y^{5(y-\frac{x}{3})} & (1) \\ x^3 = y^{-1} & (2) \end{cases}.$$

Điều kiện x, y > 0.

Thế (2) vào (1), ta được:

$$x^{x^{-3}+4x} = x^{-3.5(x^{-3}-\frac{x}{3})} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^{-3} + 4x = -15x^{-3} + 5x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^4 - 16 = 0 \end{array}\right..$$

$$\overset{x>0}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \text{ và } y = 1 \\ x = 2 \text{ và } y = \frac{1}{8} \end{array}\right..$$

Vậy, hệ phương trình có hai cặp nghiệm (1, 1) và $(2, \frac{1}{8})$.

Bài tập 2. Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} y = 1 - a - x & (1) \\ 2^{a^2}.4^{x+y-xy} = 2 & (2) \end{cases}.$$

Thế (1) vào (2), ta được:

$$2^{a^2}.4^{x+(1-a-x)-x(1-a-x)} = 2 \Leftrightarrow 2^{2[x^2+(a-1)x+1-a]} = 2^{1-a^2}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2(a-1)x + (a-1)^2 = 0, \qquad (3)$$

ta có $\Delta' = -(a-1)^2 \le 0$.

Khi đó:

- Với $a \ne 1$ thì $\Delta' < 0$ ⇔ phương trình (3) vô nghiệm ⇔ hệ vô nghiệm.
- Với $a = 1$ thì $\Delta' = 0$ ⇔ phương trình (3) có nghiệm $x = 0$, suy ra $y = 0$.

Bài tập 3. Điều kiện m > 0.

Lấy logarit cơ số 2 cả hai vế của hai phương trình, ta được:

$$\begin{cases} \log_2(2^x.3^y) = \log_2 2m \\ \log_2(3^x.2^y) = \log_2 3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y\log_2 3 = \log_2 2m \\ x\log_2 3 + y = \log_2 3m \end{cases}.$$

Ta có

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \log_2 3 \\ \log_2 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \log_2^2 3 \neq 0, \text{ hệ phương trình có nghiệm duy nhất.}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \log_2 2m & \log_2 3 \\ \log_2 3m & 1 \end{vmatrix} = \log_2 2m - \log_2 3m.\log_2 3,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & \log_2 2m \\ \log_2 3 & \log_2 3m \end{vmatrix} = \log_2 3m - \log_2 3.\log_2 2m.$$

Suy ra hệ có nghiệm:

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{\log_2 2m - \log_2 3m.\log_2 3}{1 - \log_2^2 3} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{\log_2 3m - \log_2 3.\log_2 2m}{1 - \log_2^2 3} \end{cases}.$$

a. Với $m = 1$, ta được:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\log_2 2 - \log_2 3.\log_2 3}{1 - \log_2^2 3} = 1 \\ y = \dfrac{\log_2 3 - \log_2 3.\log_2 2}{1 - \log_2^2 3} = 0 \end{cases}.$$

Vậy, với $m = 1$ hệ có cặp nghiệm $(1, 0)$.

b. Để hệ có cặp nghiệm (x, y) thoả mãn $x=2y$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2 2m - \log_2 3m.\log_2 3}{1 - \log_2^2 3} = \frac{2(\log_2 3m - \log_2 3.\log_2 2m)}{1 - \log_2^2 3}$$

$$\Leftrightarrow (1 + \log_2 m) - (\log_2 3 + \log_2 m)\log_2 3 = 2(\log_2 3 + \log_2 m) - 2(1 + \log_2 m)\log_2 3$$

$$\Leftrightarrow (1 + \log_2 3)\log_2 m = 1 - \log_2^2 3 \Leftrightarrow \log_2 m = 1 + \log_2 3$$

$$\Leftrightarrow \log_2 m = \log_2 6 \Leftrightarrow m = 6.$$

Khi đó, hệ có nghiệm $(2, 1)$.

Vậy, với $m = 6$ hệ có nghiệm $(2, 1)$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 4. Biến đổi hệ về dạng :

$$\begin{cases} 2^{x^2+4y^2} = 2^{m(x-2)-y+2} \\ y = m(x-2) - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2+4y^2} = 2^4 \\ y = m(x-2) - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ y = m(x-2) - 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (4m^2 + 1)x^2 - 16m(m+1)x + 16(m+1)^2 - 4 = 0. \qquad (1)$$

a. Với $m = -\dfrac{1}{2}$, ta được:

$$2x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = -1 \\ x = -2 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right..$$

Vậy, với $m = -\dfrac{1}{2}$ hệ có hai cặp nghiệm $(0, -1)$ và $(-2, 0)$.

b. Để hệ có 2 cặp nghiệm phân biệt điều kiện là:

(1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta'_{(1)}>0 \Leftrightarrow 32m + 12 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{3}{8}. \qquad (2)$$

Khi đó (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{16m(m+1)}{4m^2+1} \\ x_1.x_2 = \dfrac{16(m+1)^2 - 4}{4m^2+1} \end{cases} \Rightarrow y_1 = m(x_1 - 2) - 2 \text{ và } y_2 = m(x_2 - 2) - 2$$

Vì $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \frac{32}{5}$ nên:

$$\Leftrightarrow \frac{32}{5} = (x_1 - x_2)^2 + m^2(x_1 - x_2)^2 = (m^2 + 1)(x_1 - x_2)^2 = (m^2 + 1).\frac{4\Delta'}{a^2}$$

$$= \frac{-16(m^2+1)(8m+3)}{(4m^2+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow 32m^4 + 40m^3 + 31m^2 + 40m + 17=0$$

$$\Leftrightarrow (m + 1)(32m^3 + 8m^2 + 23m + 17) = 0 \xrightarrow{m<-\frac{3}{8}} m = -1.$$

Vậy, với m = -1 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Lưu ý: Trong lời giải trên bạn đọc cần chứng minh tại sao với $m < -\frac{3}{8}$ thì phương trình sau vô nghiệm:

$$32m^3 + 8m^2 + 23m + 17 = 0$$

Bài tập 5.

a. Đặt:

$$\begin{cases} u = 3^x \\ v = 2^y \end{cases}, \text{ điều kiện } u, v > 0.$$

Khi đó hệ (I) được biến đổi về dạng :

$$\begin{cases} 9u^2 + 4v^2 = 17 \\ 6u + 3v = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9u^2 - 6u + 1 = 0 \\ v = \dfrac{8-6u}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{1}{3} \\ v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = \dfrac{1}{3} \\ 2^y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Vậy, hệ có cặp nghiệm (-1, 1).

b. Đặt $u = 2^{|x|}$, điều kiện $u \geq 1$.

Hệ có dạng:

$$\begin{cases} 2u^2 - 3u = y^2 - 2 \\ 2y^2 - 3y = u^2 - 2 \end{cases} \Rightarrow 2(u^2 - y^2) - 3(u - y) = -(u^2 - y^2)$$

$$\Leftrightarrow 3(u - y)(u + y - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = y \\ y = 1 - u \end{array}\right..$$

- Với u = y, hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} u = y \\ 2u^2 - 3u = u^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = y = 1 \\ u = y = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^{|x|} = 1 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2^{|x|} = 2 \\ y = 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

- Với y = 1 – u, hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} y = 1 - u \\ 2u^2 - 3u = (1 - u)^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - u \\ u^2 - u + 1 = 0 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, hệ có ba cặp nghiệm là (0, 1); (1, 2) và (–1, 2).

c. Kí hiệu các phương trình của hệ theo thứ tự là (1) và (2).

Điều kiện $xy > 0$.

- Giải (1) ta đặt $t = \log_2(xy) \Rightarrow xy = 2^t$.

Khi đó, phương trình (1) có dạng:

$$9^t - 3 = 2(2^t)^{\log_2 3} \Leftrightarrow 3^{2t} - 3 = 2.3^t \Leftrightarrow 3^{2t} - 2.3^t - 3 = 0. \qquad (3)$$

Đặt $u = 3^t$, $u > 0$. Khi đó phương trình (3) có dạng:

$$u^2 - 2u - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = -1 \quad (l) \\ u = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow 3^t = 3 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow xy = 2.$$

- Giải (2) bằng cách biến đổi:

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + y)^2 + 2(x + y) - 2xy + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^2 + 2(x + y) - 3 = 0. \qquad (4)$$

Đặt $v = x + y$. Khi đó, phương trình (4) có dạng:

$$v^2 + 2v - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = 1 \\ v = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + y = 1 \\ x + y = -3 \end{array}\right..$$

Trường hợp 1: Với $x + y = 1$, ta được:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = 2 \end{cases}$$

khi đó x, y là nghiệm của phương trình:

$$X^2 - X + 2 = 0 \text{ vô nghiệm.}$$

Trường hợp 2: Với $x + y = -3$, ta được:

$$\begin{cases} x + y = -3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

khi đó x, y là nghiệm của phương trình:

$$X^2 + 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = -1 \\ X = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \text{ và } y = -2 \\ x = -2 \text{ và } y = -1 \end{array}\right..$$

Vậy, hệ có hai cặp nghiệm (–1, –2) và (–2, –1).

đ. Kí hiệu các phương trình của hệ theo thứ tự là (1) và (2).

- Giải (2) bằng cách biến đổi tương đương:

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 3x^2+1+xy = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x(3x+y-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 3x+y-1 = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \begin{cases} x \geq -1 \\ y = 1-3x \end{cases} \end{array}\right. .$$

Trường hợp 1: Với x = 0, thay vào (1), ta được:

$$2+2^{y-2} = 3.2^y \Leftrightarrow 8+2^y = 12.2^y \Leftrightarrow 2^y = \frac{8}{11} \Leftrightarrow y = \log_2\frac{8}{11}.$$

Trường hợp 2: Với $x \geq -1$ và $y = 1-3x$ thay vào (1), ta được:

$$2^{3x+1}+2^{-3x-1} = 3.2. \qquad (3)$$

Đặt $t = 2^{3x+1}$, vì $x \geq -1$ nên $t \geq \frac{1}{4}$. Khi đó:

$$(3) \Leftrightarrow t+\frac{1}{t} = 6 \Leftrightarrow t^2-6t+1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3-\sqrt{8}\ (l) \\ t = 3+\sqrt{8} \end{array}\right. \Leftrightarrow 2^{3x+1} = 3+\sqrt{8}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}[\log_2(3+\sqrt{8})-1] \Rightarrow y = 2-\log_2(3+\sqrt{8}).$$

Vậy, hệ phương trình có cặp hai nghiệm:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \log_2\frac{8}{11} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x = \frac{1}{3}[\log_2(3+\sqrt{8})-1] \\ y = 2-\log_2(3+\sqrt{8}) \end{cases}.$$

Bài tập 6. $(4, \sqrt{2})$ và $(4, -\sqrt{2})$.

Bài tập 7.

a. Đặt:

$$\begin{cases} u = 2^x \\ v = 3^y \end{cases}, \text{ điều kiện } u, v > 0.$$

Khi đó, hệ được biến đổi về dạng :

$$\begin{cases} u+mv = 3m \\ mu+v = 2m+1 \end{cases}. \qquad \text{(II)}$$

Ta có:

$$D = 1-m^2,\ D_u = -2m^2+2m,\ D_v = -3m^2+2m+1.$$

- Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow 1 - m^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

  Hệ (II) có nghiệm duy nhất là:

$$\begin{cases} u = \dfrac{D_u}{D} = \dfrac{2m}{m-1} \\ v = \dfrac{D_v}{D} = \dfrac{-3m-1}{m+1} \end{cases}$$

  Vì điều kiện u, v > 0, nên ta phải có :

$$\begin{cases} \dfrac{2m}{m-1} > 0 \\ \dfrac{-3m-1}{m+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < -\frac{1}{3}.$$

  Khi đó, ta được:

$$\begin{cases} 2^x = \dfrac{2m}{m-1} \\ 3^y = \dfrac{-3m-1}{m+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_2 \dfrac{2m}{m-1} \\ y = \log_3 \dfrac{-3m-1}{m+1} \end{cases}.$$

- Nếu $D = 0 \Leftrightarrow 1 - m^2 = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow m = \pm 1$.
  - Với $m = -1 \Rightarrow D_v \neq 0$, khi đó (II) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ hệ (I) vô nghiệm.
  - Với m = 1 thì hệ (I) có dạng:

$$2^x + 3^y = 3 \Rightarrow \begin{cases} y < 1 \\ x = \log_2(3 - 3^y) \end{cases}. \qquad (*)$$

Kết luận:

- Với $-1 < m < -\frac{1}{3}$ hệ có nghiệm duy nhất là:

$$\begin{cases} x = \log_2 \dfrac{2m}{m-1} \\ y = \log_3 \dfrac{-3m-1}{m+1} \end{cases}.$$

- Với m = 1 hệ có vô số nghiệm cho bởi (*)
- Với $m \leq -1$ hoặc $-\frac{1}{3} \leq m \neq 1$ hệ vô nghiệm.

b. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 8. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 9. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 10. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 11. Với m = −1 hệ có hai cặp nghiệm (−1, −1) và (−3, −3).

Bài tập 12. Với m = 1 hệ có hai cặp nghiệm (1, 1) và (2, 2).

Bài tập 13. Với m = 8 hệ có hai cặp nghiệm (2, 2) và (−2, −2).

Bài tập 14. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 15. Với m = 2 hệ có hai cặp nghiệm (−1, 0) và (1, 0).

Bài tập 16. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 17.

a. Kí hiệu các phương trình của hệ theo thứ tự là (1) và (2).

Từ (2) ta có điều kiện

$$\begin{cases} |x| \le \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ |y| \le \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Giải (1) ta được:

$$\sin(x+y)\pi = 0 \Leftrightarrow (x+y)\pi = k\pi,\ k \in Z \Leftrightarrow x + y = k,\ k \in Z \qquad (3)$$

Giải (2) ta được:

$$1 = 2(x^2+y^2) \ge (x+y)^2 = k^2 \Rightarrow |k| \le 1 \xleftrightarrow{(3)} k = 0.$$

Vậy, hệ được biến đổi thành:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2(x^2+y^2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ 2(x^2+x^2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x = \pm\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2}\ \&\ y = -\dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{1}{2}\ \&\ y = \dfrac{1}{2} \end{array}\right..$$

Vậy, hệ phương trình có 2 cặp nghiệm $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ và $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

b. (1, −1) và (3, −3).

Bài tập 18. Kí hiệu các phương trình của hệ theo thứ tự là (1) và (2).

Sử dụng bất đẳng thức Bernouli cho (1) ta được:

$$\left[\begin{array}{l} x + y = 0 \\ x + y = 1 \end{array}\right..$$

- Với x + y = 0, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1\ \&\ y = 1 \\ x = 2\ \&\ y = -2 \end{array}\right..$$

- Với x + y = 1, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\ \&\ y = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\ \&\ y = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy, hệ có 4 cặp nghiệm (−1, 1), (2, −2), $(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$ và $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$.

CHƯƠNG VI

PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ LOGARIT

CHỦ ĐỀ 1

PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa: Phương trình logarit là phương trình chứa ẩn ở dưới dấu logarit.

II. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

Bài toán 1: Phương pháp logarit hoá và đưa về cùng cơ số.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để chuyển ẩn số khỏi loga người ta có thể logarit hoá theo cùng một cơ số cả hai vế của phương trình, bất phương trình. Chúng ta lưu ý các phép biến đổi cơ bản sau:

Dạng 1: Phương trình:

$$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = a^b \end{cases}.$$

Dạng 2: Phương trình:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = g(x) > 0 \end{cases}.$$

Chú ý: Việc lựa chọn điều kiện $f(x) > 0$ hoặc $g(x) > 0$ tuỳ thuộc vào độ phức tạp của $f(x)$ và $g(x)$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 1: Giải các phương trình sau:

a. $\log_x(x + 6) = 3$.

☐ $x = 0$. ☐ $x = 1$. ☐ $x = 2$. ☐ $x = 3$.

b. $\log_{\cos x}4.\log_{\cos^2 x} 2 = 1$.

☐ $x = k\pi$ ☐ $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ☐ $x=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ☐ $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$

c. $2^{\log_3\left(\frac{2x-3}{x}\right)} = 1$.

☐ $x = -4$. ☐ $x = -1$. ☐ $x = 1$. ☐ $x = 3$.

Bài tập 2: Giải các phương trình sau:

a. $\log_2(x-1)^2 = 2\log_2(x^3+x+1)$.

☐ $x = -1$. ☐ $x = 1$. ☐ $x = 0$. ☐ $x = 9$.

b. $\log_2(x^2-1) = \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$.

☐ $x = -1$. ☐ $x = 5$. ☐ $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. ☐ $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

c. $\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = \log_{10} x$.

☐ $x = -2$. ☐ $x = 3$. ☐ $x = 10$. ☐ $x = 1$.

d. $x + \lg(1 + 2^x) = x\lg 5 + \lg 6$.

☐ $x = 0$. ☐ $x = 1$. ☐ $x = 4$. ☐ Vô nghiệm.

Bài tập 3: Giải các phương trình sau:

a. $\log_{\frac{1}{3}}[\sqrt{2}(x^3+x^2)-2] + \log_3(2x+2) = 0$.

☐ $x = 1$. ☐ $x = 4$. ☐ $x = \sqrt{2}$. ☐ $x = \frac{1}{2}$.

b. $(x-1)\log_5 3 + \log_5(3^{x+1}+3) = \log_5(11.3^x - 9)$.

☐ $x = 0$ và $x = 1$. ☐ $x = 1$ và $x = 3$.

☐ $x = 2$ và $x = 3$. ☐ $x = 0$ và $x = 2$.

c. $\log_4(x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x} + \log_8(4+x)^3$.

☐ $x = 2$ và $x = -6$. ☐ $x = -6$ và $x = 2 + \sqrt{24}$.

☐ $x = 2 \pm \sqrt{24}$. ☐ $x = 2$ và $x = 2 - \sqrt{24}$.

d. $\log_2(x^2+3x+2) + \log_2(x^2+7x+12) = 3 + \log_2 3$.

☐ $x = 0$ và $x = -3$. ☐ $x = 0$ và $x = -5$.

☐ $x = -5$ và $x = -4$. ☐ $x = -4$ và $x = -3$.

e. $\log_2(x^2+x+1) + \log_2(x^2-x+1) = \log_2(x^4+x^2+1) + \log_2(x^4-x^2+1)$.

☐ $x = 1$ và $x = \pm 2$. ☐ $x = 0$ và $x = \pm 2$.

☐ $x = 2$ và $x = \pm 1$. ☐ $x = 0$ và $x = \pm 1$.

Bài tập 4: Cho phương trình:

$$\log_{2-m}(x^2+mx) = \log_{2-m}(x+m-1).$$

a. Giải phương trình với $m = 0$.

☐ $x = 0$. ☐ $x = 1$. ☐ Mọi x. ☐ Vô nghiệm.

b. Xác định m để phương trình có nghiệm duy nhất.

☐ $1 < m < 2$. ☐ $m > 2$. ☐ $0 < m < 1$. ☐ $m < 0$.

Bài tập 5: Cho phương trình:

$$\log_m[x^2 - (6m - 1)x + 9m^2 - 3m + 2] = \log_m(x - m).$$

a. Giải phương trình với m = 2.

☐ $x = \pm 1$. ☐ $x = \pm\sqrt{2}$. ☐ $x = \sqrt{2} \pm 1$. ☐ $x = 6 \pm \sqrt{2}$.

b. Xác định m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

☐ $m < 0$. ☐ $m = 1$. ☐ $m > 1$. ☐ $0 < m < 1$.

Bài tập 6: Cho phương trình:

$$\log_3(x^2 + 4mx) + \log_{\frac{1}{3}}(2x - 2m - 1) = 0.$$

a. Giải phương trình với m = 1.

☐ $x = 0$. ☐ $x = 3$. ☐ Mọi x. ☐ Vô nghiệm.

b. Xác định m để phương trình có nghiệm duy nhất.

☐ $m = 0$ hoặc $1 \le m \le 2$. ☐ $m = 6$ hoặc $1 \le m \le 2$.

☐ $m = 0$ hoặc $-\frac{1}{2} \le m \le -\frac{1}{10}$. ☐ $m = 6$ hoặc $-\frac{1}{2} \le m \le 1$.

Bài tập 7: Cho phương trình:

$$\log_3(9^x + 9m^3) = x.$$

a. Giải phương trình với m = 0.

☐ $x = -3$. ☐ $x = 0$. ☐ $x = 1$. ☐ $x = 9$.

b. Xác định m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

☐ $m < -4$. ☐ $m > 1$. ☐ $m > \frac{1}{3}$. ☐ $0 < m < \frac{1}{\sqrt[3]{36}}$.

Bài tập 8: Cho phương trình:

$$\frac{\log_x(2m - x)}{\log_x 2} + \frac{\log_m x}{\log_m 2} = \frac{1}{\log_{m^2-1} 2}.$$

a. Giải phương trình với m = 2.

☐ $x = -3$. ☐ $x = 1$. ☐ $x = 3$. ☐ Vô nghiệm.

b. Xác định m để phương trình có nghiệm.

☐ $m > 0$. ☐ $m < 1$. ☐ $0 < m < \sqrt{2}$. ☐ $1 < m \ne \sqrt{2}$.

Bài tập 9: Cho phương trình:

$$2\log_{m^2+2}(x - 1) = \log_{m^2+2}(mx^2 + 1).$$

a. Giải phương trình với m = 2.

☐ $x = 2$. ☐ $x = 7$. ☐ $x = 13$. ☐ Vô nghiệm.

b. Giải và biện luận phương trình theo m.

Bài tập 10: Cho phương trình:

$$\frac{\lg(mx)}{\lg(x+1)} = 2.$$

a. Giải phương trình với $m = 4$.

☐ $x = -2$. ☐ $x = 1$. ☐ $x = 2$. ☐ $x = 99$.

b. Xác định m để phương trình có nghiệm duy nhất.

☐ $m > 4$ hoặc $m = 0$. ☐ $m = 0$ hoặc $m = 4$.
☐ $m < 0$ hoặc $m = 4$. ☐ $0 < m < 4$.

Bài tập 11: Cho phương trình:

$$\log_m(x^2 + mx - 3) = \log_m x.$$

a. Giải phương trình với $m = 3$.

b. Xác định m để phương trình có nghiệm.

Bài tập 12: Cho phương trình:

$$2\log_4(8x^2 - 2x + 2m - 4m^2) + \log_{\frac{1}{2}}(4x^2 + 2mx - 2m^2) = 0.$$

a. Giải phương trình với $m = 0$.

b. Xác định m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1^2 + x_2^2 > \frac{1}{4}$.

Bài tập 13: Giải và biện luận phương trình theo a:

$$2\lg x - \lg(x - 1) = \lg a.$$

Bài tập 14: Với $a > 0$, hãy giải và biện luận phương trình:

$$\log_{2+\sqrt{3}}\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \log_{2-\sqrt{3}}\sqrt{x - 1} = \log_{7-4\sqrt{3}}[a(x + 2)].$$

Bài toán 2: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 1.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Phương pháp dùng ẩn phụ dạng 1 là việc sử dụng một ẩn phụ để chuyển phương trình ban đầu thành một phương trình với một ẩn phụ.

Ta lưu ý các phép đặt ẩn phụ thường gặp sau:

Dạng 1: Nếu đặt $t = \log_a x$ với $x > 0$ thì

$$\log_a^k x = t^k,$$

$$\log_x a = \frac{1}{t} \text{ với } 0 < x \neq 1.$$

Dạng 2: Ta biết rằng

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a},$$

do đó nếu đặt $t = a^{\log_b x}$ thì $t = x^{\log_b a}$

Tuy nhiên trong nhiều bài toán có chứa $a^{\log_b x}$, ta thường đặt ẩn phụ dần với $t = \log_b x$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 15: Giải các phương trình sau:

a. $\log_2(3^x - 1).\log_2(2.3^x - 2) = 2$.

☐ $x = 0$ và $x = 1$. ☐ $x = 0$ và $x = 2$.

☐ $x = 1$ và $x = \log_3\frac{5}{4}$. ☐ $x = 2$ và $x = \log_3\frac{5}{4}$.

b. $\log_2(5^x - 1).\log_2(2.5^x - 2) = 2$.

☐ $x = \log_5 3$, $x = 0$. ☐ $x = 0$ và $x = 3$.

☐ $x = 3$, $x = \log_5\frac{5}{4}$. ☐ $x = \log_5 3$, $x = \log_5\frac{5}{4}$.

Bài tập 16: Giải các phương trình sau:

a. $\log_2(2x^2).\log_x^2 2 = 1$.

☐ $x = \pm 1$. ☐ $x = 2$. ☐ $x = \sqrt{2}$. ☐ $x = 2^{1\pm\sqrt{5}}$.

b. $\log_{5x}\frac{5}{x} + \log_5^2 x = 1$.

☐ $x = -1$, $x = 1$ và $x = 25$. ☐ $x = -5$, $x = 3$ và $x = 125$.

☐ $x = 5$, $x = 10$ và $x = \frac{1}{25}$. ☐ $x = 1$, $x = 5$ và $x = \frac{1}{25}$.

c. $\log_{\frac{2}{x}} 2 + \log_2 4x = 3$.

☐ $x = 1$ và $x = 2$. ☐ $x = 1$ và $x = 4$.

☐ $x = 3$ và $x = 4$. ☐ $x = 2$ và $x = 3$.

d. $3^{\log_2 x} + x^{\log_2 3} = 6$.

☐ $x = 1$. ☐ $x = 2$. ☐ $x = 3$. ☐ Vô nghiệm.

Bài tập 17: Giải các phương trình sau:

a. $\sqrt{\log_9(3x^2 - 4x + 2)} + 1 = \log_3(3x^2 - 4x + 2)$.

☐ $x = -1$ và $x = 2$. ☐ $x = 2$ và $x = 3$.

☐ $x = 3$ và $x = \frac{7}{3}$. ☐ $x = -1$ và $x = \frac{7}{3}$.

b. $\log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}).\log_3(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6|x - \sqrt{x^2 - 1}|$.

☐ $x = 0$ và $x = 1$. ☐ $x = 2$ và $x = 3$.

☐ $x = \frac{1}{2}$ và $x = 3$. ☐ $x = 1$ và $x = \frac{1}{2}(3^{\log_6 2} + 3^{-\log_6 2})$.

Bài tập 18: Giải các phương trình sau:

a. $(x-1)^{\log_2|4(x-1)|} = 4(x-1)^3$.

☐ $x = 2$ và $x = 4$. ☐ $x = 2$ và $x = 5$.

☐ $x = \frac{3}{2}$ và $x = 4$. ☐ $x = \frac{3}{2}$ và $x = 5$.

b. $(x-1)^{\log_2|4(x-1)|} = 16(x-1)^2$.

☐ $x = 2$ và $x = 3$. ☐ $x = \frac{5}{4}$ và $x = 5$.

☐ $x = \frac{5}{4}$ và $x = 2$. ☐ $x = 2$ và $x = 5$.

Bài tập 19: Cho phương trình:

$$m\log_2(3^x + 3) + (m-5)\log_{3^x+3} 2 + 2(m-1) = 0.$$

a. Giải phương trình với $m = 1$.

☐ $x = 16$. ☐ $x = 4$. ☐ $x = 1$. ☐ $x = 0$.

b. Xác định m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt dương.

☐ $m = 1$. ☐ $m = 2$. ☐ $m = 3$. ☐ Vô nghiệm.

Bài tập 20: Cho phương trình:

$$(x-2)^{\log_2 4(x-2)} = 2^\alpha (x-2)^3.$$

a. Giải phương trình với $\alpha = 2$.

☐ $x = 2$ và $x = 3$. ☐ $x = \frac{5}{2}$ và $x = 3$.

☐ $x = \frac{5}{2}$ và $x = 6$. ☐ $x = 2$ và $x = 6$.

b. Xác định α để phương trình có hai nghiệm phân biệt x, x_2 thoả mãn $\frac{5}{2} \le x_1, x_2 \le 4$.

☐ $\alpha > 0$. ☐ $1 \le \alpha \le 2$. ☐ $\alpha \le -\frac{1}{4}$ ☐ $-\frac{1}{4} < \alpha \le 0$.

Bài tập 21: Cho phương trình:

$$(x-2)^{\log_3|9(x-2)|} = 9(x-2)^m.$$

a. Giải phương trình với $m = 3$.

☐ $x = 2$ và $x = 3$. ☐ $x = 3$ và $x = 11$.

☐ $x = 2$ và $x = \frac{7}{3}$. ☐ $x = \frac{7}{3}$ và $x = 11$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm thoả mãn:

$$3x_1x_2 - 6(x_1 + x_2) + 11 = 0.$$

☐ $m = 0$. ☐ $m = 1$. ☐ $m = 4$. ☐ Vô nghiệm.

Bài tập 22: Cho phương trình:

$$x^{\lg^2 x^2 - 3\lg x - \frac{9}{2}} = 10^{m\lg x}.$$

a. Giải phương trình với $m = -2$.

☐ $x = 1$, $x = 10$ và $x = 100$. ☐ $x = 10$, $x = 100$ và $x = 100$.

☐ $x = 10^{-\frac{1}{2}}$, $x = 10$ và $x = 1000$. ☐ $x = 1$, $x = 10^{-\frac{1}{2}}$ và $x = 10^{\frac{5}{4}}$.

b. Xác định m để phương trình có ba nghiệm $x_0 = 1$, và x_1, x_2 khác 1 thoả mãn $x_1 . x_2^{4} = 1$.

☐ $m = -\frac{1}{2}$. ☐ $m = -\frac{7}{2}$. ☐ $m = 1$. ☐ $m = 10$.

Bài toán 3: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 2.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ý tưởng của phương pháp này cũng giống như phương pháp đã được sử dụng trong phương trình mũ.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 23: Giải phương trình:

a. $\lg^2 x - \lg x.\log_2(4x) + 2\log_2 x = 0$.

☐ $x = 1$ và $x = 100$. ☐ $x = 10$ và $x = 100$.

☐ $x = 1$ và $x = 10$. ☐ $x = 100$ và $x = 1000$.

b. $\lg^4 x + \lg^3 x - 2\lg^2 x - 9\lg x - 9 = 0$.

☐ $x = 1$ và $x = 10$. ☐ $x = 10$ và $x = 1000$.

☐ $x = 1$ và $x = \frac{1}{100}$. ☐ $x = 10^{\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}}$.

Bài tập 24: Giải các phương trình:

a. $\lg^2(x^2 + 1) + (x^2 - 5).\lg(x^2 + 1) - 5x^2 = 0$.

☐ $x = \pm\sqrt{99999}$ và $x = 0$. ☐ $x = \pm 3$ và $x = 9$.

☐ $x = \pm 9$ và $x = 0$. ☐ $x = \pm 3$ và $x = \sqrt{99999}$.

b. $\log_3^2(x + 1) + (x - 5)\log_3(x + 1) - 2x + 6 = 0$.

☐ $x = 2$ và $x = 8$. ☐ $x = 26$ và $x = 80$.

☐ $x = 8$ và $x = 26$. ☐ $x = 2$ và $x = 8$.

Bài tập 25: Giải các phương trình:

a. $(x + 3)\log_3^2(x + 2) + 4(x + 2)\log_3(x + 2) - 16 = 0$.

☐ $x = 1$ và $x = 2$. ☐ $x = 2$ và $x = 7$.

☐ $x = -\frac{161}{81}$ và $x = 1$. ☐ $x = -\frac{161}{81}$ và $x = 7$.

b. $(x + 2)\log_3^2(x + 1) + 4(x + 1)\log_3(x + 1) - 16 = 0.$

☐ $x = 1$ và $x = 2$. ☐ $x = 2$ và $x = 8$.

☐ $x = -\dfrac{80}{81}$ và $x = 1$. ☐ $x = -\dfrac{80}{81}$ và $x = 2$.

Bài toán 4: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 3.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Phương pháp dùng ẩn phụ dạng 3 sử dụng hai ẩn phụ cho hai biểu thức logarit trong phương trình và khéo léo biến đổi phương trình thành phương trình tích.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 26: Giải phương trình:

$$\log_2^2 x - \log_2 x + \log_3 x - \log_2 x.\log_3 x = 0.$$

☐ $x = -1$ và $x = 1$. ☐ $x = -1$ và $x = 6$.

☐ $x = 1$ và $x = 6$. ☐ $x = 1$ và $x = 2$.

Bài tập 27: Giải phương trình:

$$(2 + \sqrt{2})^{\log_2 x} + x.\ (2 - \sqrt{2})^{\log_2 x} = 1 + x^2.$$

☐ $x = 1$. ☐ $x = 2$. ☐ $x = 4$. ☐ Vô nghiệm.

Bài tập 28: Cho phương trình:

$$\lg^2(x^2 + 1) - \lg(x^3 - 2x^2 - 9x + m + 1).\lg(x^2 + 1) =$$
$$= 2\lg\frac{x^3 - 2x^2 - 9x + m + 1}{x^2 + 1}.$$

a. Giải phương trình với $m = 0$.

☐ $x = 0, x = \pm 3$. ☐ $x = 1, x = \pm 3$.

☐ $x = 0, x = \dfrac{3 \pm 3\sqrt{5}}{2}$. ☐ $x = 1, x = \dfrac{3 \pm 3\sqrt{5}}{2}$.

b. Xác định m để phương trình có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

☐ $m = 0$. ☐ $m = 2$. ☐ $m = 9$. ☐ $m = 11$.

Bài tập 29: Cho phương trình:

$$\log_2 x.\log_2(x^2 - 2x + 3) - m\log_2 x - 2\log_2(x^2 - 2x + 3) + 2m = 0$$

a. Giải phương trình với $m = 1$.

b. Xác định m để phương trình có ba nghiệm phân biệt.

Bài toán 5: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 4.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ý tưởng của phương pháp này cũng giống như phương pháp đã được sử dụng trong phương trình mũ.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 30: Giải phương trình:

a. $\sqrt[3]{2-\lg x} = 1 - \sqrt{\lg x - 1}$.

☐ $x = 10$, $x = 100$ và $x = 10^{10}$.   ☐ $x = 1$, $x = 10$ và $x = 10^{100}$.

☐ $x = 0$, $x = 100$ và $x = 10^{2}$.   ☐ $x = 0$, $x = 10$ và $x = 10^{1000}$.

b. $\sqrt{3 + \log_2(x^2 - 4x + 5)} + 2\sqrt{5 - \log_2(x^2 - 4x + 5)} = 6$.

☐ $x = 1$, $x = 2$ và $x = 4$.   ☐ $x = 2$, $x = 4$ và $x = 8$.

☐ $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x = 3$ và $x = 8$.   ☐ $x = 1, x = 3$ và $x = 2 \pm \sqrt{2^{\frac{121}{25}} - 1}$.

Bài tập 31: Giải và biện luận phương trình:

a. $\sqrt{\log_3 x} + \sqrt{4 - \log_3 x} = m$.   b. $\lg x + \sqrt{1 - \lg^2 x} = m$.

Bài toán 6: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 5.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Phương pháp dùng ẩn phụ dạng 5 là việc sử dụng 1 ẩn phụ chuyển phương trình ban đầu thành một hệ phương trình với 1 ẩn phụ và 1 ẩn x.

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện có nghĩa cho các biểu thức trong phương trình.

Bước 2: Biến đổi phương trình về dạng:

$$f[x, \varphi(x)] = 0$$

Bước 3: Đặt $y = \varphi(x)$, ta biến đổi phương trình thành hệ:

$$\begin{cases} y = \varphi(x) \\ f(x, y) = 0 \end{cases}.$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 32: Giải phương trình:

$$\sqrt{\lg x + 1} = \lg^2 x + 4\lg x + 5.$$

☐ $x = 1$. ☐ $x = 10$. ☐ $x = 100$. ☐ Vô nghiệm.

Bài tập 33: Giải các phương trình:

$$\log_2^3 x + 2 = 3\sqrt[3]{3\log_3 x - 2}.$$

☐ $x = 1$ và $x = 2$. ☐ $x = 2$ và $x = 3$.

☐ $x = \frac{1}{9}$ và $x = 1$. ☐ $x = \frac{1}{9}$ và $x = 3$.

Bài tập 34: Giải phương trình:

$$6^x = 3\log_6(5x + 1) + 2x + 1.$$

☐ $x = 0$ và $x = 1$. ☐ $x = 4$ và $x = 11$.

☐ $x = 1$ và $x = 4$. ☐ $x = 0$ và $x = 11$.

Bài tập 35: Giải phương trình:

$$\sqrt{3\log_2 x + 1} = -4\log_2^2 x + 13\log_2 x - 5.$$

Bài toán 7: Sử dụng tính chất liên tục của hàm số.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ý tưởng của phương pháp này cũng giống như phương pháp đã được sử dụng trong phương trình mũ.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 36: Chứng minh rằng phương trình sau có ít nhất một nghiệm:

$$\log_3(2x + 1) = 3^{1 - 2x}.$$

Bài tập 37: Chứng minh rằng phương trình sau có ít nhất một nghiệm:

$$\log_2(2x + 1) = 2^{x - 1}.$$

Bài tập 38: Chứng minh rằng phương trình sau có 3 nghiệm thuộc $(\frac{1}{4}, 4)$:

$$2\log_2^3 x - 6\log_2 x + 1 = 0.$$

Bài toán 8: Sử dụng tính chất đơn điệu của hàm số .

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ý tưởng của phương pháp này cũng giống như phương pháp đã được sử dụng trong phương trình mũ.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 39: Giải các phương trình:

a. $\log_2 x + \sqrt{2^x + 2} = 2$.

☐ $x = 1$. ☐ $x = 2$. ☐ $x = 16$. ☐ Vô nghiệm.

b. $\dfrac{3}{2^x + \sqrt{1 + \log_2 x}} = 1.$

☐ $x = 1.$ ☐ $x = 4.$ ☐ $x = 8.$ ☐ $x = 256.$

Bài tập 40: Giải các phương trình:

a. $\log_2^2 x + (x - 5)\log_2 x - 2x + 6 = 0.$

☐ $x = 1$ và $x = 2.$ ☐ $x = 4$ và $x = 16.$

☐ $x = 1$ và $x = 16.$ ☐ $x = 2$ và $x = 4.$

b. $\lg(x^2 - x - 6) + x = \lg(x + 2) + 4.$

☐ $x = -2.$ ☐ $x = 1.$ ☐ $x = 4.$ ☐ $x = 10.$

Bài tập 41: Giải các phương trình:

a. $\log_3(\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 2) + \left(\dfrac{1}{5}\right)^{3x - x^2 - 1} = 2.$

☐ $x = 3 \pm \sqrt{2}.$ ☐ $x = 1 \pm \sqrt{3}.$ ☐ $x = 1 \pm \sqrt{5}.$ ☐ $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$

b. $\log_{\sqrt[4]{5}}(x^2 - 2x - 3) = 2\log_2(x^2 - 2x - 4).$

☐ $x = -1, x = 3.$ ☐ $x = -2, x = 4.$

☐ $x = -2, x = 1 + \sqrt{5}.$ ☐ $x = 4, x = 1 - \sqrt{5}.$

Bài tập 42: Giải các phương trình:

a. $\log_2(1 + \sqrt[3]{x}) = \log_7 x.$

b. $\log_7 x = \log_3(\sqrt{x} + 2).$

c. $3\log_3(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) = 2\log_2\sqrt{x}.$

d. $2\log_6(\sqrt[4]{x} + \sqrt[8]{x}) = \log_4\sqrt{x}.$

e. $\log_3 x = \log_2(\sqrt{x} + 1).$

f. $\log_3(\sqrt{x} + 2) = \log_2(\sqrt{x} + 1).$

g. $2\log_3(\text{cotg}x) = \log_2(\cos x).$

h. $2^{\log_5(x+3)} = x.$

i. $\log_x(x + 1) = \lg\dfrac{3}{2}.$

j. $\log_{x+3}(3 - \sqrt{x^2 - 2x + 1}) = \dfrac{1}{2}.$

Bài tập 43: Xác định a để phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt:

$$4^{-|x-a|}\log_{\sqrt{2}}(x^2 - 2x + 3) + 2^{-x^2+2x}\log_{\frac{1}{2}}(2|x - a| + 2) = 0$$

Bài tập 44: Giải và biện luận phương trình:

$$2^{x^2}\log_2(x^2 + 2) = 4^{|x+a|}[\log_2(2|x + a| + 2)].$$

Bài tập 45: Giải và biện luận phương trình:

$$\log_2\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \log_{\frac{1}{2}}(x - m) = x - m - \sqrt{x^2 - 3x + 2}.$$

Bài toán 9: Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ý tưởng của phương pháp này cũng giống như phương pháp đã được sử dụng trong phương trình mũ.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 46: Tìm x để phương trình sau nghiệm đúng với mọi a:

$$\log_{a^2+2}(\sqrt{x+3}-1) = \log_{a^2x^2+2}(2-\sqrt{x}).$$

☐ x = 0. ☐ x = −3. ☐ x = 1. ☐ Vô nghiệm.

Bài tập 47: Cho phương trình:

$$\log_2(mx^3 - 5mx^2 + \sqrt{6-x}) = \log_{2+m}(3-\sqrt{x-1}).$$

a. Giải phương trình với m = 0.

☐ x = 1 và x = 6. ☐ x = 5 và x = 6.

☐ x = 1 và x = 2. ☐ x = 2 và x = 5.

b. Tìm các giá trị của x nghiệm đúng phương trình đã cho với mọi m ≥ 0.

☐ x = 2. ☐ x = 5. ☐ x = 6. ☐ Vô nghiệm.

Bài tập 48: Cho phương trình

$$2\log_{a^2+2}(4-\sqrt{7+2x}) = \log_{a^2x^2+2}(4-3x).$$

a. Giải phương trình với a = 0.

b. Tìm các giá trị của x để phương trình đã cho đúng với mọi m ≥ 0.

Bài tập 49: Cho phương trình

$$\log_2(a^2x^2 + 5a^2x + \sqrt{6-x}) = \log_{a^2+2}(3-\sqrt{x-1}).$$

a. Giải phương trình với a = 0.

b. Tìm các giá trị của x để phương trình đã cho đúng với mọi m ≥ 0.

Bài toán 10: Sử dụng phương pháp đánh giá.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ý tưởng của phương pháp này cũng giống như phương pháp đã được sử dụng trong phương trình mũ.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 50: Giải các phương trình:

a. $\log_{\frac{1}{3}}(3+|\sin x|) = 2^{|x|} - 2.$

☐ x = 0. ☐ x = π. ☐ x = 2π. ☐ x = kπ.

b. $\log_2^2 x - 2(x-1)\log_2 x + 2x^2 - 6x + 5 = 0.$

☐ $x = 1$ ☐ $x = 2.$ ☐ $x = 4.$ ☐ $x = 256.$

Bài tập 51: Giải phương trình:

$$\log_2(x + |x| - 1) = \sqrt{1 - x^2}.$$

☐ $x = 1.$ ☐ $x = 2.$ ☐ $x = 0.$ ☐ Vô nghiệm.

Bài tập 52: Giải và biện luận theo tham số a phương trình:

$$\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax} + \log_x \sqrt[4]{ax}} + \sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \log_x \sqrt[4]{\frac{x}{a}}} = \sqrt{\log_a x}.$$

III. HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ x + 6 = x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ (x-2)(x^2 + 2x + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 3.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\begin{cases} 0 < \cos x \neq 1 \\ \log_{\cos x} 2.\log_{\cos x} 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \cos x < 1 \\ \left[\begin{array}{l} \log_{\cos x} 2 = 1 \\ \log_{\cos x} 2 = -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \cos x < 1 \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 2 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

c. Biến đổi phương trình về dạng:

$$2^{\log_3\left(\frac{2x-3}{x}\right)} = 2^0 \Leftrightarrow \log_3\frac{2x-3}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{x} = 1 \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 3.

Bài tập 2.

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\log_2|x-1| = 2\log_2(x^3 + x + 1) \Leftrightarrow |x-1| = x^3 + x + 1$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 1 > 0 \\ x - 1 = x^3 + x + 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 1 < 0 \\ -x + 1 = x^3 + x + 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1 \\ x^3 + 2 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1 \\ x^3 + 2x = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 0.

b. Điều kiện:

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1. \qquad (*)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\log_2(x^2 - 1) = -\log_2(x - 1) \Leftrightarrow \log_2[(x^2 - 1)(x - 1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x - 1) = 1 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - x = 0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

c. Điều kiện $x > 0$.

Ta đi biến đổi phương trình về cùng cơ số 10:

$$\log_2 10.\lg x + \log_3 10.\lg x + \log_4 10.\lg x = \lg x$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 10 + \log_3 10 + \log_4 10 - 1).\lg x = 0 \Leftrightarrow \lg x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x=1$.

d. Viết lại phương trình dưới dạng:

$$\lg(1 + 2^x) - \lg 6 = x(\lg 5 - 1) \Leftrightarrow \lg\frac{1+2^x}{6} = \lg\left(\frac{1}{2}\right)^x \Leftrightarrow \frac{1+2^x}{6} = \frac{1}{2^x}.$$

Đặt $t = 2^x$, điều kiện $t > 0$, khi đó phương trình có dạng:

$$\frac{1+t}{6} = \frac{1}{t} \Leftrightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -3 \ (l) \\ t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 1$.

Bài tập 3.

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\log_3[\sqrt{2}(x^3 + x^2) - 2] = \log_3(2x + 2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2 > 0 \\ \sqrt{2}(x^3 + x^2) - 2 = 2x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x^3 + x^2 - x\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 0 \quad (1) \end{cases}$$

Giải (1), với nhận xét rằng $ac^3 = 1.(-\sqrt{2})^3 = -2\sqrt{2} = bd^3$ do đó phương trình có nghiệm $x = -\frac{c}{b} = \sqrt{2}$.

Biến đổi phương trình (1) về dạng:

$$(x - \sqrt{2})[x^2 + (\sqrt{2} + 1)x + 2] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \sqrt{2} = 0 \\ x^2 + (\sqrt{2} + 1)x + 2 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{2} > -1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \sqrt{2}$.

Nhận xét: Như vậy, bằng việc sử dụng phép biến đổi tương đương chúng ta đã bỏ qua được việc giải điều kiện $\sqrt{2}\,(x^3 + x^2) - 2 > 0$.

b. $x = 0$ và $x = 2$.

c. $x = 2$ và $x = 2 - \sqrt{24}$.

d. Điều kiện:

$$\begin{cases} x^2 + 3x + 2 > 0 \\ x^2 + 7x + 12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -4 \\ -3 < x < -2 \\ x > -1 \end{array}\right. . \qquad (*)$$

Phương trình được viết lại dưới dạng:

$$\log_2[(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12)] = \log_2 24 \Leftrightarrow (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 24$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 5x + 4).(x^2 + 5x + 6) = 24. \qquad (2)$$

Đặt $t = x^2 + 5x + 4$, điều kiện $t \geq -\frac{9}{4}$. $\qquad (**)$

Khi đó (2) có dạng:

$$t(t + 2) = 24 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 24 = 0 \overset{(**)}{\Leftrightarrow} t = 4 \Leftrightarrow x^2+5x+4=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -5 \end{array}\right. .$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 0$ và $x = -5$.

e. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\log_2[(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)] = \log_2(x^4 + x^2 + 1) + \log_2(x^4 - x^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^4 + x^2 + 1) = \log_2(x^4 + x^2 + 1) + \log_2(x^4 - x^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^4 - x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x^4 - x^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right. .$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 0$ và $x = \pm 1$.

Bài tập 4. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\begin{cases} 0 < 2 - m \neq 1 \\ x^2 + mx = x + m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq m < 2 \\ x > 1 - m \\ f(x) = x^2 + (m - 1)x - m + 1 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

a. Với $m = 0$, ta được:

$$\begin{cases} 1 \neq 0 < 2 \\ x > 1 \\ x^2 - x + 1 = 0 \end{cases}, \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, với $m = 0$ phương trình vô nghiệm.

b: Vậy phương trình có nghiệm duy nhất ⇔ (2) có nghiệm thoả mãn

$$\left[\begin{array}{l} 1-m<x_1=x_2\\ x_1\le 1-m<x_2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-m<x_1=x_2\\ x_1<1-m<x_2\\ 1-m=x_1<x_2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\Delta'=0\\ -\dfrac{b}{2a}>1-m\end{cases}\\ af(1-m)<0\\ \begin{cases}f(1-m)=0\\ \dfrac{S}{2}>1-m\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow m>1.$$

Vậy, với $1<m<2$ phương trình có nghiệm duy nhất.

Bài tập 5. Biến đổi tương đương phương trình về dạng:

$$\begin{cases}0<m\ne 1\\ x^2-(6m-1)x+9m^2-3m+2=x-m>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0<m\ne 1\\ x>m\\ f(x)=x^2-6mx+9m^2-2m+2=0\quad(2)\end{cases}$$

a. Với $m=2$, ta được:

$$\begin{cases}0<2\ne 1\\ x>2\\ x^2-12x+34=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>2\\ x=6\pm\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=6\pm\sqrt{2}.$$

Vậy, với $m=2$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x=6\pm\sqrt{2}$.

b. Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

⇔ (2) có 2 nghiệm thoả mãn $m<x_1<x_2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'\ge 0\\ af(m)>0\\ S/2>m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2m-2\ge 0\\ 4m^2-2m+2>0\\ 3m>m\end{cases}\Leftrightarrow m>1.$$

Vậy, với $m>1$ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Bài tập 6.

a. Vô nghiệm.

b. $m=0$ hoặc $-\dfrac{1}{2}\le m\le-\dfrac{1}{10}$.

Bài tập 7.

a. $x=0$.

b. $0<m<\dfrac{1}{\sqrt[3]{36}}$.

Bài tập 8.

a. $x=3$.

b. $1<m\ne\sqrt{2}$.

Bài tập 9. Điều kiện:

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ 0 < m^2 + 2 \neq 1 \\ mx^2 + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ mx^2 + 1 > 0 \end{cases}. \qquad (*)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\log_{m^2+2}(x-1)^2 = \log_{m^2+2}(mx^2+1)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = mx^2 + 1 \Leftrightarrow (m-1)x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow (m-1)x = -2 \quad (2)$$

a. Với m = 2, ta được:

$x = -2$, không thoả mãn (*).

Vậy, với m = 2 phương trình vô nghiệm.

b. Ta xét các trường hợp:

- Với m = 1 thì:

  $(2) \Leftrightarrow 0 = -2$ vô nghiệm.

- Với $m \neq 1$ thì:

  $(2) \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{1-m}$.

Để nghiệm trên thoả mãn (*), điều kiện là:

$$\frac{2}{1-m} > 1 \Leftrightarrow \frac{1+m}{1-m} > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1.$$

Vậy, với $|m| < 1$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{2}{1-m}$, ngoài ra vô nghiệm.

Bài tập 10.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\log_{x+1}(mx) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x + 1 \neq 1 \\ mx = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x \neq 0 \\ x^2 - (m-2)x + 1 = 0 \quad (2) \end{cases}.$$

a. Với m = 4, ta được:

$$\begin{cases} -1 < x \neq 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, với m = 4 phương trình có nghiệm duy nhất x = 1.

b. Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có duy nhất một nghiệm thoả mãn $-1 < x \neq 0$.

Nhận xét rằng, phương trình (2) không thể có nghiệm x = 0 vì $\frac{c}{a} = 1 \neq 0$.

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ phương trình (*) có duy nhất nghiệm thoả mãn $x > -1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} af(-1) < 0 \\ \begin{cases} \Delta = 0 \\ -\dfrac{b}{2a} > -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ \begin{cases} (m-2)^2 - 4 = 0 \\ \dfrac{m-2}{2} > -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 4 \end{array}\right. \\ m > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m = 4 \end{array}\right..$$

Vậy, với $m < 0$ hoặc $m = 4$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 11. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 12. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 13. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 14. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 15.

a. Viết lại phương trình dưới dạng:

$$\log_2(3^x - 1).\log_2[2.(3^x - 1)] = 2 \Leftrightarrow \log_2(3^x - 1).[1 + \log_2(3^x - 1)] = 2. \quad (1)$$

Điều kiện $3^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

Đặt $t = \log_2(3^x - 1)$, khi đó (1) có dạng:

$$t(1 + t) = 2 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2(3^x - 1) = 1 \\ \log_2(3^x - 1) = -2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x - 1 = 2 \\ 3^x - 1 = 2^{-2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 3 \\ 3^x = 5/4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \log_3 5/4 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 1$ và $x = \log_3\dfrac{5}{4}$.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\log_2(5^x - 1).[1 + \log_2(5^x - 1)] = 2.$$

Điều kiện $5^x - 1 > 0 \Leftrightarrow 5^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$.

Đặt $t = \log_2(5^x - 1)$. Khi đó, phương trình có dạng:

$$t(1 + t) = 2 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2(5^x - 1) = 1 \\ \log_2(5^x - 1) = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^x - 1 = 2 \\ 5^x - 1 = 2^{-2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^x = 3 \\ 5^x = \dfrac{5}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \log_5 3 \\ x = \log_5 \dfrac{5}{4} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = \log_5 3$, $x = \log_5\dfrac{5}{4}$.

Bài tập 16.

a. Điều kiện $0 < x \neq 1$.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$\frac{1 + 2\log_2 x}{\log_2^2 x} = 1 \Leftrightarrow \log_2^2 x - 2\log_2 x - 1 = 0. \qquad (*)$$

Đặt $t = \log_2 x$, khi đó (*) có dạng:

$$t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \pm \sqrt{5} \Leftrightarrow \log_2 x = 1 \pm \sqrt{5} \Leftrightarrow x = 2^{1 \pm \sqrt{5}}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 2^{1 \pm \sqrt{5}}$.

b. Điều kiện $0 < x \neq \frac{1}{5}$.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$\frac{\log_5 \frac{5}{x}}{\log_5 (5x)} + \log_5^2 x = 1 \Leftrightarrow \frac{1 - \log_5 x}{1 + \log_5 x} + \log_5^2 x = 1. \qquad (**)$$

Đặt $t = \log_5 x$, khi đó (**) có dạng:

$$\frac{1-t}{1+t} + t^2 = 1 \Leftrightarrow t^3 + t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 1 \\ t = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5 x = 0 \\ \log_5 x = 1 \\ \log_5 x = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 5 \\ t = 1/25 \end{array}\right. .$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 1$, $x = 5$ và $x = \frac{1}{25}$.

c. $x = 1$ và $x = 4$.

d. $x = 2$.

Bài tập 17.

a. $x = -1$ và $x = \frac{7}{3}$.

b. Điều kiện:

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x - \sqrt{x^2 - 1} > 0 \\ x + \sqrt{x^2 - 1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Nhận xét rằng:

$$(x - \sqrt{x^2 - 1})(x + \sqrt{x^2 - 1}) = 1 \Rightarrow (x - \sqrt{x^2 - 1}) = (x + \sqrt{x^2 - 1})^{1}. \ (*)$$

Khi đó, phương trình được viết lại dưới dạng:

$$\log_2(x+\sqrt{x^2-1})^{-1}.\log_3(x+\sqrt{x^2-1}) = \log_6(x+\sqrt{x^2-1})^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+\sqrt{x^2-1}).\log_3(x+\sqrt{x^2-1}) = \log_6(x+\sqrt{x^2-1}).$$

Sử dụng phép đổi cơ số:

$$\log_2(x+\sqrt{x^2-1}) = \log_2 6.\log_6(x+\sqrt{x^2-1});$$

$$\log_3(x+\sqrt{x^2-1}) = \log_3 6.\log_6(x+\sqrt{x^2-1}).$$

Khi đó, phương trình được viết lại dưới dạng:

$$\log_2 6.\log_6(x+\sqrt{x^2-1}).\ \log_3 6.\log_6(x+\sqrt{x^2-1}) = \log_6(x+\sqrt{x^2-1}).\quad (1)$$

Đặt $t = \log_6(x+\sqrt{x^2-1})$.

Khi đó (1) có dạng:

$$t(\log_2 6.\log_3 6.t - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ \log_2 6.\log_3 6.t - 1 = 0 \end{array}\right..$$

- Với $t = 0$ thì ta có:

$$\log_6(x+\sqrt{x^2-1}) = 0 \Leftrightarrow x+\sqrt{x^2-1} = 1 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+\sqrt{x^2-1} = 1 \\ x-\sqrt{x^2-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

- Với $\log_2 6.\log_3 6.t - 1 = 0$ thì ta có:

$$\log_2 6.\log_3 6.\ \log_6(x+\sqrt{x^2-1}) - 1 = 0 \Leftrightarrow \log_2 6.\log_3(x+\sqrt{x^2-1}) = 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x+\sqrt{x^2-1}) = \log_6 2 \Leftrightarrow x+\sqrt{x^2-1} = 3^{\log_6 2}$$

$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+\sqrt{x^2-1} = 3^{\log_6 2} \\ x-\sqrt{x^2-1} = 3^{-\log_6 2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(3^{\log_6 2} + 3^{-\log_6 2}).$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 1$ và $x = \frac{1}{2}(3^{\log_6 2} + 3^{-\log_6 2})$.

Bài tập 18.

a. $x = \frac{3}{2}$ và $x = 5$.

b. $x = \frac{5}{4}$ và $x = 5$.

Bài tập 19. Đặt $t = \log_2(3^x + 3)$ điều kiện $t > \log_2 3$, suy ra $\log_{3^x+3} 2 = \frac{1}{t}$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$mt + \frac{m-5}{t} + 2(m-1) = 0 \Leftrightarrow f(t) = mt^2 + 2(m-1)t + m - 5 = 0.\quad (*)$$

a. Với $m = 1$, ta được:

$$t^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -2 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \log_2(3^x + 3) = 2 \Leftrightarrow 3^x + 3 = 4 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, với $m = 1$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

b. Vì $x > 0$ suy ra

$$3^x > 1 \Leftrightarrow 3^x + 3 > 4 \Leftrightarrow \log_2(3^x + 3) > 2 \Leftrightarrow t > 2.$$

Vậy phương trình ban đầu có 2 nghiệm phân biệt dương

$$\Leftrightarrow (*) \text{ có 2 nghiệm thoả mãn } 2 < t_1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ af(2) > 0 \\ S/2 > 2 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, không tồn tại m để phương trình có hai nghiệm phân biệt dương.

Bài tập 20. Điều kiện $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(x-2)^{\log_2 4(x-2)} = 2^{\alpha}(x-2)^3 \Leftrightarrow (x-2)^{-3+\log_2 4+\log_2(x-2)} = 2^{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^{\log_2(x-2)-1} = 2^{\alpha}.$$

Lấy logarit cơ số 2 hai vế phương trình, ta được:

$$\log_2[(x-2)^{\log_2(x-2)-1}] = \log_2 2^{\alpha} \Leftrightarrow [\log_2(x-2) - 1]\log_2(x-2) = \alpha.$$

Đặt $t = \log_2(x-2)$, phương trình có dạng:

$$(t-1)t = \alpha \Leftrightarrow f(t) = t^2 - t - \alpha = 0. \qquad (*)$$

a. Với $\alpha = 2$, phương trình (*) có dạng:

$$t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2(x-2) = -1 \\ \log_2(x-2) = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{2} \\ x = 6 \end{array}\right..$$

Vậy, với $\alpha = 2$ phương trình có nghiệm $x = \dfrac{5}{2}$ và $x = 6$.

b. Với $\dfrac{5}{2} \le x \le 4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \le x - 2 \le 2 \Leftrightarrow -1 \le \log_2(x-2) \le 1 \Leftrightarrow -1 \le t \le 1$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn $\dfrac{5}{2} \le x_1 \le 4$ và $\dfrac{5}{2} \le x_2 \le 4$

$\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm thuộc $[-1, 1]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ af(-1) \ge 0 \\ af(1) \ge 0 \\ -1 < S/2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 4\alpha > 0 \\ 2 - \alpha \ge 0 \\ -\alpha \ge 0 \\ -1 < 1/2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < \alpha \le 0.$$

Vậy, với $-\dfrac{1}{4} < \alpha \le 0$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 21. Điều kiện $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

Lấy logarit cơ số 3 hai vế, ta được:

$$\log_3[(x-2)^{\log_3[9(x-2)]}] = \log_3[9(x-2)^m]$$

$$\Leftrightarrow \log_3[9(x-2)].\log_3(x-2) = 2 + \log_3(x-1)^m$$

$$\Leftrightarrow [2 + \log_3(x-2)].\log_3(x-2) = 2 + m\log_3(x-1). \qquad (1)$$

Đặt $t = \log_3(x-2)$.

Khi đó (1) có dạng:

$$(2+t)t = 2 + mt \Leftrightarrow t^2 - (m-2)t - 2 = 0. \qquad (2)$$

a. Với $m = 3$, ta được:

$$t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3(x-2) = -1 \\ \log_3(x-2) = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{7}{3} \\ x = 11 \end{array}\right. .$$

Vậy, với $m = 3$ phương trình có hai nghiệm $x = \dfrac{7}{3}$ và $x = 11$.

b. Xét điều kiện:

$$3(x_1 - 2)(x_2 - 2) - 1 = 0 \Leftrightarrow (x_1 - 2)(x_2 - 2) = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \log_3[(x_1 - 2)(x_2 - 2)] = \log_3\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x_1 - 2) + \log_3(x_2 - 2) = -1 \Leftrightarrow t_1 + t_2 = -1.$$

Vậy, để phương trình có nghiệm thoả mãn $3x_1x_2 - 6(x_1 + x_2) + 11 = 0$

$$\Leftrightarrow \text{(2) có nghiệm } t_1, t_2 \text{ thoả mãn } t_1 + t_2 = -1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ t_1 + t_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)^2 + 8 \geq 0 \\ m - 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy, với $m = 1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 22.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$x^{\lg^2 x^2 - 3\lg x - \frac{9}{2}} = (10^{\lg x})^m = x^m \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ \lg^2 x^2 - 3\lg x - \dfrac{9}{2} = m \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ 8\lg^2 x - 6\lg x - 9 - 2m = 0 \quad (1') \end{cases} \end{array}\right. .$$

Đặt t = lgx, hệ được chuyển về dạng:

$$\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ f(t) = 8t^2 - 6t - 9 - 2m = 0 \quad (2) \end{cases} \end{array}\right. . \qquad (*)$$

Vậy, với mọi m phương trình luôn có nghiệm x = 1.

a. Với m = −2, thì hệ (*) được chuyển về dạng:

$$\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ 8t^2 - 6t - 5 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ \left[\begin{array}{l} t = -1/2 \\ t = 5/4 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ \left[\begin{array}{l} \lg x = -1/2 \\ \lg x = 5/4 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 10^{-\frac{1}{2}} \\ x = 10^{\frac{5}{4}} \end{array}\right. .$$

Vậy, với m = − 2 phương trình có ba nghiệm x = 1, $x = 10^{-\frac{1}{2}}$ và $x = 10^{\frac{5}{4}}$.

b. Để phương trình có ba nghiệm $x_0 = 1$, và x_1, x_2 khác 1 thoả mãn $x_1.x_2^4 = 1$

⟺ (1') có hai nghiệm x_1, x_2 khác 1 thoả mãn $x_1.x_2^4 = 1$.

Ta xét các điều kiện:

- x_1, x_2 khác 1 ⟺ $\lg x_1, \lg x_2 \neq \lg 1$ ⟺ $t_1, t_2 \neq 0$
- $x_1.x_2^4 = 1$ ⟺ $\lg(x_1.x_2^4) = \lg 1$ ⟺ $\lg x_1 + 4\lg x_2 = 0$ ⟺ $t_1 + 4t_2 = 0$.

Vậy, điều kiện là (2) có hai nghiệm $t_1, t_2 \neq 0$ và thoả mãn $t_1 + 4t_2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(0) \neq 0 \\ t_1 + 4t_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 + 8(9 + 2m) > 0 \\ -9 - 2m \neq 0 \\ -4t_2 + t_2 = \dfrac{6}{8} \\ -4t_2.t_2 = \dfrac{-9 - 2m}{8} \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{7}{2}.$$

Vậy, với $m = -\frac{7}{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 23.

a. Điều kiện x > 0.

Biến đổi phương trình về dạng :

$\lg^2 x - (2 + \log_2 x)\lg x + 2\log_2 x = 0.$

Đặt t = lgx, khi đó phương trình tương đương với:

$t^2 - (2 + \log_2 x).t + 2\log_2 x = 0$

ta có $\Delta = (2 + \log_2 x)^2 - 8\log_2 x = (2 - \log_2 x)^2$ suy ra phương trình có nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} t = 2\\ t = \log_2 x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lg x = 2\\ \lg x = \dfrac{\lg x}{\lg 2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lg x = 2\\ \lg x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 100\\ x = 1\end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 1$ và $x = 100$.

b. Điều kiện $x > 0$.

Đặt $t = \lg x$, ta được:

$$t^4 + t^3 - 2t^2 - 9t - 9 = 0 \Leftrightarrow 3^2 + 3t.3 - t^4 - t^3 + 2t^2 = 0.$$

Đặt $u = 3$, ta được:

$$u^2 + 3t.u - t^4 - t^3 + 2t^2 = 0$$

ta xét phương trình bậc hai theo u, được $\Delta = 9t^2 + 4(t^4 + t^3 - 2t^2) = (2t^2 + t)^2$, suy ra:

$$\left[\begin{array}{l} u = \dfrac{-3t - (2t^2 + t)}{2} = -t^2 - 2t\\ u = \dfrac{-3t + (2t^2 + t)}{2} = t^2 - t\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3 = -t^2 - 2t\\ 3 = t^2 - t\end{array}\right. \Leftrightarrow t^2 - t - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \Leftrightarrow \lg x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \Leftrightarrow x = 10^{\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 10^{\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}}$.

Bài tập 24.

a. Đặt $t = \lg(x^2 + 1)$, điều kiện $t \geq 0$ vì $x^2 + 1 \geq 1$ nên $\lg(x^2 + 1) \geq \lg 1 = 0$. (*)

Khi đó, phương trình tương đương với:

$$t^2 + (x^2 - 5)t - 5x^2 = 0$$

ta có $\Delta = (x^2 - 5)^2 + 20x^2 = (x^2 + 5)^2$ nên phương trình có nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} t = 5\\ t = -x^2\end{array}\right.$$

- Với $t = 5 \Leftrightarrow \lg(x^2 + 1) = 5 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 10^5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{99999}$.
- Với $t = -x^2 \Leftrightarrow \lg(x^2 + 1) = -x^2 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{l}\log(x^2 + 1) = 0\\ x^2 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow x = 0.$

Vậy, phương trình có ba nghiệm $x = \pm\sqrt{99999}$ và $x = 0$.

b. Điều kiện $x > -1$.

Đặt $t = \log_3(x + 1)$. Khi đó, phương trình có dạng:

$$t^2 + (x - 5)t - 2x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 3 - x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3(x+1) = 2 \\ \log_3(x+1) = 3 - x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8 \\ x = 2 \end{array}\right. .$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 8$ và $x = 2$.

Bài tập 25.

a. $x = -\dfrac{161}{81}$ và $x = 1$. b. $x = -\dfrac{80}{81}$ và $x = 2$.

Bài tập 26. Đặt:

$$\begin{cases} u = \log_2 x \\ v = \log_3 x \end{cases} .$$

Phương trình được viết lại dưới dạng:

$$u^2 - u + v - uv = 0 \Leftrightarrow (u - 1)(u - v) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 1 \\ u = v \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = \log_3 x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1 \end{array}\right. .$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 2$ và $x = 1$.

Bài tập 27. Điều kiện $x > 0$.

Nhận xét rằng:

$$(2 + \sqrt{2})^{\log_2 x}.(2 - \sqrt{2})^{\log_2 x} = [(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})]^{\log_2 x} = 2^{\log_2 x} = x.$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = (2 + \sqrt{2})^{\log_2 x} \\ v = (2 - \sqrt{2})^{\log_2 x} \end{cases}, \; u, v > 0 \Rightarrow uv = x.$$

Phương trình được viết lại dưới dạng:

$$u + uv.v = 1 + (uv)^2 \Leftrightarrow (u - 1)(1 - u.v^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 1 \\ u.v^2 = 1 \end{array}\right. .$$

- Với $u = 1$ thì:

$$(2 + \sqrt{2})^{\log_2 x} = 1 \Leftrightarrow \log_2 x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

- Với $u.v^2 = 1$ thì:

$$x.v = 1 \Leftrightarrow x.(2 - \sqrt{2})^{\log_2 x} = 1 \Leftrightarrow 2^{\log_2 x}.(2 - \sqrt{2})^{\log_2 x} \Rightarrow 1$$

$$\Leftrightarrow [2(2 - \sqrt{2})]^{\log_2 x} = 1 \Leftrightarrow \log_2 x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài tập 28. Điều kiện $x^3 - 2x^2 - 9x + m + 1 > 0$. (*)

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\lg^2(x^2 + 1) - \lg(x^3 - 2x^2 - 9x + m + 1).\lg(x^2 + 1) =$$

$$= 2[\lg(x^3 - 2x^2 - 9x + m + 1) - \lg(x^2 + 1)]$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = \lg(x^3 - 2x^2 - 9x + m + 1) \\ v = \lg(x^2 + 1) \end{cases}, \text{ điều kiện } v \geq 0.$$

Khi đó, phương trình tương đương với:

$$v^2 - uv - 2u + 2v = 0 \Leftrightarrow (u - v)(v + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v \\ v = -2 \ \text{(l)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \lg(x^3 - 2x^2 - 9x + m + 1) = \lg(x^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 9x + m + 1 = x^2 + 1 \qquad (**)$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 9x + m = 0. \qquad (2)$$

Nhờ (**) nên điều kiện (*) luôn được thoả mãn.

a. Với m = 0, ta được:

$$x^3 - 3x^2 - 9x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3x - 9) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{3 \pm 3\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy, với m = 0 phương trình có ba nghiệm $x = 0$, $x = \dfrac{3 \pm 3\sqrt{5}}{2}$.

b. *Điều kiện cần*: Giả sử phương trình có ba nghiệm phân biệt thành cấp số cộng, khi đó:

$$x_1 + x_3 = 2x_2, \qquad (3)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3 \Leftrightarrow 3x_2 = 3 \Leftrightarrow x_2 = 1.$$

Với $x_2 = 1$ thay vào phương trình ban đầu ta được:

$$11 - m = 0 \Leftrightarrow m = 11.$$

Đó chính là điều kiện cần để (2) có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng.

Điều kiện đủ: Với m=11 thì:

$$(1) \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 9x + 11 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x - 11) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 - \sqrt{12} \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 + \sqrt{12} \end{array}\right. \quad \text{thoả mãn (3).}$$

Vậy, với m = 11 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 29. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 30.

a. Điều kiện:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \lg x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 10 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 10.$$

Đặt :

$$\begin{cases} u = \sqrt[3]{2 - \lg x} \\ v = \sqrt{\lg x - 1} \end{cases}, \ v \geq 0, \text{ suy ra } u^3 + v^2 = 1.$$

Khi đó, phương trình được chuyển thành hệ:

$$\begin{cases} u^3 + v^2 = 1 \\ u + v = 1 \end{cases} \Rightarrow u^3 + (1 - u)^2 = 1 \Leftrightarrow u^3 + u^2 - 2u = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 0 \\ u = 1 \\ u = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{2 - \lg x} = 0 \\ \sqrt[3]{2 - \lg x} = 1 \\ \sqrt[3]{2 - \lg x} = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg x = 2 \\ \lg x = 1 \\ \lg x = 10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 100 \\ x = 10 \\ x = 10^{10} \end{array}\right. .$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm $x = 100$, $x = 10$ và $x = 10^{10}$.

b. Điều kiện:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 5 > 0 \\ 3 + \log_2(x^2 - 4x + 5) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 \leq 2^5 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 27 \leq 0 \\ 5 - \log_2(x^2 - 4x + 5) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2 - \sqrt{31} \leq x \leq 2 + \sqrt{31}. \qquad (*)$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = \sqrt{3 + \log_2(x^2 - 4x + 5)} \\ v = \sqrt{5 - \log_2(x^2 - 4x + 5)} \end{cases}, \text{ điều kiện } u, v \geq 0.$$

Khi đó, phương trình được chuyển thành:

$$\begin{cases} u + 2v = 6 \\ u^2 + v^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 6 - 2v \\ (6 - 2v)^2 + v^2 = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 6 - 2v \\ 5v^2 - 24v + 28 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 6 - 2v \\ \left[\begin{array}{l} v = 2 \\ v = \dfrac{14}{5} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = 2 \ \& \ u = 2 \\ v = \dfrac{14}{5} \ \& \ v = \dfrac{2}{5} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{3 + \log_2(x^2 - 4x + 5)} = 2 \\ \sqrt{5 - \log_2(x^2 - 4x + 5)} = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{3 + \log_2(x^2 - 4x + 5)} = 14/5 \\ \sqrt{5 - \log_2(x^2 - 4x + 5)} = 2/5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2(x^2 - 4x + 5) = 1 \\ \log_2(x^2 - 4x + 5) = \dfrac{121}{25} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x + 5 = 2 \\ x^2 - 4x + 5 = 2^{\frac{121}{25}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ x^2 - 4x + 5 - 2^{\frac{121}{25}} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \text{ hoặc } x = 3 \\ x = 2 \pm \sqrt{2^{\frac{121}{25}} - 1} \end{array}\right. .$$

Vậy, phương trình có bốn nghiệm $x = 1$, $x = 3$ và $x = 2 \pm \sqrt{2^{\frac{121}{25}} - 1}$.

Bài tập 31. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 32. Điều kiện $\lg x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{10}$.

Đặt $t = \lg x$ với $t \geq -1$, ta được:

$$\sqrt{t+1} = t^2 + 4t + 5 \Leftrightarrow \sqrt{t+1} = (t+2)^2 + 1$$

Đặt $y + 2 = \sqrt{t+1}$, điều kiện $y + 2 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -2$. (*)

Khi đó, phương trình được chuyển thành hệ:

$$\begin{cases} y + 2 = (t+2)^2 + 1 \\ (y+2)^2 = t + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 1 = (t+2)^2 & (1) \\ t + 1 = (y+2)^2 & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow t - y = -[(t+2)^2 - (y+2)^2] \Leftrightarrow t - y = -(t-y)(t+y+4)$$

$$\Leftrightarrow (t-y)(t+y+5) = 0 \overset{(*)\text{ và } t \geq -1}{\Leftrightarrow} t = y.$$

- Với $t = y$ vào (1) được:

$$t^2 + 3t + 3 = 0 \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài tập 33. Điều kiện $x > 0$.

Đặt $t = \log_3 x$, ta được:

$$t^3 + 2 = 3\sqrt[3]{3t-2}.$$

Đặt $y = \sqrt[3]{3t-2}$.

Khi đó, phương trình được chuyển thành hệ:

$$\begin{cases} t^3 + 2 = 3y \\ y^3 = 3t - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^3 + 2 = 3y & (1) \\ y^3 + 2 = 3t & (2) \end{cases} \Rightarrow t^3 - y^3 = -3(t-y)$$

$$\Leftrightarrow (t-y)(t^2 + ty + y^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t - y = 0 \\ t^2 + ty + y^2 + 2 = 0 \text{ (vn)} \end{array}\right. \Leftrightarrow t = y.$$

Thay $t = y$ vào (1) được:

$$t^3 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2 + t - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t - 1 = 0 \\ t^2 + t - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 1 \\ \log_3 x = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \frac{1}{9} \end{array}\right..$$

Vậy, nghiệm của phương trình là $x = 3$ và $x = \frac{1}{9}$.

Bài tập 34. Điều kiện $5x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{5}$.

Đặt $y = \log_6(5x + 1)$. Khi đó, phương trình được chuyển thành hệ:

$$\begin{cases} 6^x = 3y + 2x + 1 \\ y = \log_6(5x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6^x = 2x + 3y + 1 & (1) \\ 6^y = 5x + 1 & (2) \end{cases}. \qquad \text{(I)}$$

Trừ theo vế hai phương trình của (I), ta được:

$$6^x + 3x = 6^y + 3y. \qquad (3)$$

Xét hàm số $f(t)=6^t + 3t$ là hàm đơn điệu trên **R**.

Khi đó (3) được viết lại dưới dạng:

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y.$$

Khi đó (2) có dạng:

$$6^x - 5x - 1 = 0 \Leftrightarrow 6^x + (1 - 6)x = 1 \overset{\text{Bernoulli}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm x = 0 và x = 1.

Bài tập 35. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 36. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 37. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 38. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 39.

a. Điều kiện $x > 0$.

Vế trái của phương trình là một hàm đồng biến trên $(0, +\infty)$ và vế phải là hàm hằng do đó phương trình nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Nhận xét rằng với x = 1 thì:

$$\log_2 1 + \sqrt{2+2} = 2 \Leftrightarrow 2 = 2 \text{ luôn đúng.}$$

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất x = 1.

b. Điều kiện $x > 0$.

Vế trái của phương trình là một hàm nghịch biến trên $(0, +\infty)$ và vế phải là hàm hằng do đó phương trình nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Nhận xét rằng với x = 1 thì:

$$\frac{3}{2 + \sqrt{1 + \log_2 1}} = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \text{ luôn đúng.}$$

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất x = 1.

Bài tập 40.

a. Điều kiện $x > 0$.

Đặt $t = \log_2 x$. Khi đó, phương trình có dạng:

$$t^2 + (x - 5)t - 2x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 3 - x \end{array}\right..$$

Với $t = 2$ thì $\log_2 x = 2 \Leftrightarrow x = 4$.

Với $t = 3 - x$ thì $\log_2 x = 3 - x$.

- Hàm số $y = \log_2 x$ là hàm đồng biến.
- Hàm số $y = 3 - x$ là hàm nghịch biến.
- Vậy, phương trình nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.
- Nhận xét rằng x = 2 là nghiệm của phương trình.

Vậy, phương trình có nghiệm x = 4 và x = 2.

b. Điều kiện $x > 3$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\lg\frac{x^2 - x - 6}{x + 2} = 4 - x \Leftrightarrow \lg(x - 3) = 4 - x.$$

Nhận xét rằng trên $(3, +\infty)$ vế trái của phương trình là một hàm đồng biến và vế phải là hàm nghịch biến do đó phương trình nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Mặt khác với $x = 4$ thì:

$\lg(4 - 3) = 4 - 4 \Leftrightarrow 0 = 0$ luôn đúng.

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 4$.

Bài tập 41.

a. Điều kiện:

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 1 \\ x \geq 2 \end{array}\right..$$

Đặt $u = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$, $u \geq 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = u^2 \Leftrightarrow 3x - x^2 - 1 = 1 - u^2$.

Khi đó, phương trình ban đầu có dạng:

$$\log_3(u + 2) + \left(\frac{1}{5}\right)^{1-u^2} = 2. \qquad (*)$$

Xét hàm số $f(u) = \log_3(u + 2) + \left(\frac{1}{5}\right)^{1-u^2} = \log_3(u + 2) + \frac{1}{5}.5^{u^2}$ là hàm số đồng biến trên $D=[0, +\infty)$.

Mặt khác $f(1) = \log_3(1 + 2) + \frac{1}{5}.5 = 2$.

Khi đó:

$$(*) \Leftrightarrow f(u) = f(1) \Leftrightarrow u = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 2} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

b. Điều kiện:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ x^2 - 2x - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 1 - \sqrt{5} \\ x > 1 + \sqrt{5} \end{array}\right..$$

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$\log_{\sqrt{5}}(x^2 - 2x - 3) = \log_2(x^2 - 2x - 4)$$

$$\Leftrightarrow \log_5(x^2 - 2x - 3) = \log_4(x^2 - 2x - 4). \qquad (1)$$

Đặt $t = x^2 - 2x - 4$, khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \log_5(t + 1) = \log_4 t. \qquad (2)$$

Đặt $y = \log_4 t \Rightarrow t = 4^y$, phương trình (2) được chuyển thành hệ:

$$\begin{cases} t = 4^y \\ t + 1 = 5^y \end{cases} \Rightarrow 4^y + 1 = 5^y \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^y + \left(\frac{1}{5}\right)^y = 1. \qquad (3)$$

Hàm số $f(y) = \left(\frac{4}{5}\right)^y + \left(\frac{1}{5}\right)^y$ là hàm nghịch biến.

Ta có:

- Với $y = 1$, $f(1) = 1$ do đó $y = 1$ là nghiệm của phương trình (3).
- Với $y > 1$, $f(y) < f(1) = 1$ do đó phương trình (3) vô nghiệm.
- Với $y < 1$, $f(y) > f(1) = 1$ do đó phương trình (3) vô nghiệm.

Vậy $y = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (3).

Suy ra:

$$\log_4 t = 1 \Leftrightarrow t = 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -2 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = -2$, $x = 4$.

Bài tập 42. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 43. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 44. Viết lại phương trình dưới dạng:

$$2^{x^2+2}\log_2(x^2 + 2) = 2^{2|x+a|+2}[\log_2(2|x + a| + 2)]. \qquad (2)$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t.\log_2 t$ với $t \geq 2$ là hàm đồng biến.

Vậy, phương trình được viết dưới dạng:

$$f(x^2 + 2) = f(2|x + a| + 2) \Leftrightarrow x^2 + 2 = 2|x + a| + 2 \Leftrightarrow x^2 = 2|x + a|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 2x + 2a \\ -x^2 = 2x + 2a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2 - 2x - 2a = 0 & (3) \\ x^2 + 2x + 2a = 0 & (4) \end{array}\right.$$

a. Giải và biện luận (3): $\Delta_{(3)} = 1 + 2a$.

- Nếu $\Delta'_{(3)} < 0 \Leftrightarrow a < -\frac{1}{2} \Rightarrow$ (3) vô nghiệm.
- Nếu $\Delta'_{(3)} = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ (3) có nghiệm $x = \frac{1}{2}$.
- Nếu $\Delta'_{(3)} > 0 \Leftrightarrow a > -\frac{1}{2} \Rightarrow$ (3) có nghiệm $x = 1 \pm \sqrt{1 + 2a}$.

b. Giải và biện luận (4): $\Delta_{(4)} = 1 - 2a$.

- Nếu $\Delta'_{(4)} < 0 \Leftrightarrow a > \frac{1}{2} \Rightarrow$ (4) vô nghiệm.
- Nếu $\Delta'_{(4)} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow$ (4) có nghiệm $x = -\frac{1}{2}$.
- Nếu $\Delta'_{(4)} > 0 \Leftrightarrow a < \frac{1}{2} \Rightarrow$ (4) có nghiệm $x = -1 \pm \sqrt{1 - 2a}$.

Kết luận:

- Với $a < -\frac{1}{2}$, phương trình có 2 nghiệm $x = -1 \pm \sqrt{1-2a}$.
- Với $a = -\frac{1}{2}$, phương trình có 3 nghiệm $x = \frac{1}{2}$, $x=-1\pm\sqrt{1-2a}$.
- Với $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$, phương trình có 4 nghiệm $x = 1 \pm \sqrt{1+2a}$ và $x = -1 \pm \sqrt{1-2a}$.
- Với $a = \frac{1}{2}$, phương trình có 3 nghiệm $x = -\frac{1}{2}$, $x = 1 \pm \sqrt{2}$.
- Với $a > \frac{1}{2}$, phương trình có 2 nghiệm $x = 1 \pm \sqrt{1+2a}$.

Bài tập 45. Viết lại phương trình dưới dạng:

$$\log_2\sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x^2-3x+2} = \log_2(x-m) + x - m$$

Hàm số $f(x) = \log_2 x + x$ đồng biến.

Vậy, phương trình được viết dưới dạng:

$$f(\sqrt{x^2-3x+2}) = f(x-m) \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+2} = x - m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - m \ge 0 \\ x^2 - 3x + 2 = (x-m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge m \\ (2m-3)x = m^2 - 2 \quad (*) \end{cases}. \qquad \text{(I)}$$

- Với $2m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$, khi đó (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình vô nghiệm.
- Với $2m - 3 \ne 0 \Leftrightarrow m \ne \frac{3}{2}$, khi đó:

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge m \\ x = \dfrac{m^2-2}{2m-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{m^2-2}{2m-3} \\ \dfrac{m^2-2}{2m-3} \ge m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{m^2-2}{2m-3} \\ \left[\begin{array}{l} m \le 1 \\ 3/2 < m \le 2 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Kết luận:

- Với $m \le 1$ hoặc $\frac{3}{2} < m \le 2$ phương trình có nghiệm $x = \dfrac{m^2-2}{2m-3}$.
- Ngoài ra vô nghiệm.

Bài tập 46.

Điều kiện cần: Giả sử (1) nghiệm đúng với mọi a $\Rightarrow$ đúng với $a = 0$.

Với $a = 0$, phương trình có dạng:

$$\log_2(\sqrt{x+3} - 1) = \log_2(2 - \sqrt{x}) \Leftrightarrow \sqrt{x+3} - 1 = 2 - \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3} + \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 \ge 0 \\ x \ge 0 \\ x + 3 + x + 2\sqrt{x(x+3)} = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ \sqrt{x(x+3)} = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 3 - x \ge 0 \\ x(x+3) = (3-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy $x = 1$ là điều kiện cần để phương trình nghiệm đúng với mọi a.

Điều kiện đủ: Với $x = 1$, phương trình có dạng:

$$\log_{a^2+2}(\sqrt{1+3} - 1) = \log_{a^2+2}(2 - \sqrt{1}) \Leftrightarrow \log_{a^2+2} 1 = \log_{a^2+2} 1 \text{ luôn đúng}$$

Vậy, $x = 1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 47. Kí hiệu phương trình ban đầu là (1).

a. Với $m = 0$ phương trình có dạng:

$$\log_2\sqrt{6-x} = \log_2(3 - \sqrt{x-1}). \qquad (2)$$

Điều kiện:

$$\begin{cases} 6 - x > 0 \\ x - 1 \ge 0 \\ 3 - \sqrt{x-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le x < 6.$$

Phương trình (2) có dạng:

$$\sqrt{6-x} = 3 - \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \sqrt{6-x} + \sqrt{x-1} = 3$$

$$\Leftrightarrow (6-x) + (x-1) + 2\sqrt{(6-x)(x-1)} = 9 \Leftrightarrow \sqrt{(6-x)(x-1)} = 2$$

$$\Leftrightarrow (6-x)(x-1) = 4 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 5 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 2$ và $x = 5$.

b. Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ như sau:

Điều kiện cần: Phương trình nghiệm đúng với $\forall m \ge 0$, trước hết nghiệm đúng với $m = 0$ tức là đúng với $x = 2$ và $x = 5$.

Điều kiện đủ: Ta xét lần lượt:

- Với $x = 2$, phương trình (1) có dạng:

  $$\log_2(2 - 12m) = \log_{2+m}(3 - 1) \Leftrightarrow \log_2(2 - 12m) = \log_{2+m}2,$$

  phương trình này không thể nghiệm đúng với mọi $m \ge 0$, bởi với $m = 2$ mâu thuẫn.

- Với $x = 5$, phương trình (1) có dạng:

  $$\log_2 1 = \log_{2+m} 1, \text{ luôn đúng.}$$

Vậy, với $x = 5$ nghiệm đúng phương trình đã cho với mọi $m \ge 0$.

Bài tập 48. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 49. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 50.

a. $x = 0$.

b. Điều kiện $x > 0$.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$[\log_2 x - (x-1)] + (x-2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \log_2 x - x + 1 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 2$.

Bài tập 51. $x = 1$.

Bài tập 52. Kí hiệu phương trình ban đầu là (1).

Điều kiện $0 < x$, $a \neq 1$ và $\log_a x > 0$.

Khi đó, (1) có dạng:

$$\sqrt{\log_a x + \log_x a + 2} + \sqrt{\log_a x + \log_x a - 2} = 2\sqrt{\log_a x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{(\log_a x + 1)^2}{\log_a x}} + \sqrt{\frac{(\log_a x - 1)^2}{\log_a x}} = 2\sqrt{\log_a x} \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow |\log_a x + 1| + |\log_a x - 1| = 2\log_a x$$

$$\Leftrightarrow |\log_a x + 1| + |\log_a x - 1| = (\log_a x + 1) + (\log_a x - 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_a x + 1 \geq 0 \\ \log_a x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \log_a x \geq 1 = \log_a a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ x \geq a \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < x \leq a \end{cases} \end{array}\right.$$

Kết luận.

- Khi $a > 1$, phương trình có nghiệm $x \geq a$.
- Khi $0 < a < 1$, phương trình có nghiệm $0 < x \leq a$.
- Khi $a \leq 0$ hoặc $a = 1$, phương trình vô nghiệm.

Chú ý:

1. Bài toán trên có thể giải như sau:

$$(2) \Leftrightarrow |\log_a x + 1| + |\log_a x - 1| = |2\log_a x|$$

$$\Leftrightarrow |\log_a x + 1| + |\log_a x - 1| = |(\log_a x + 1) + (\log_a x - 1)|$$

$$\Leftrightarrow (\log_a x + 1)(\log_a x - 1) \geq 1 \Leftrightarrow \log_a x \geq 1.$$

2. Bài toán trên có thể giải như sau (bởi $\log_a x > 0$):

$$(2) \Leftrightarrow \log_a x + 1 + |\log_a x - 1| = 2\log_a x \Leftrightarrow |\log_a x - 1| = \log_a x - 1$$

$$\Leftrightarrow \log_a x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \log_a x \geq 1.$$

CHỦ ĐỀ 2
BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa: Bất phương trình logarit là bất phương trình chứa ẩn ở dưới dấu logarit.

II. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

Bài toán 1: Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương .

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để chuyển ẩn số khỏi loga người ta có thể mũ hoá theo cùng một cơ số cả hai vế của bất phương trình. Chúng ta lưu ý các phép biến đổi cơ bản sau:

Dạng 1: Với bất phương trình:

$$\log_a f(x) < \log_a g(x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ 0 < f(x) < g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > g(x) > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ (a-1)[f(x) - g(x)] < 0 \end{cases}.$$

Dạng 2: Với bất phương trình:

$$\log_a f(x) < b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ 0 < f(x) < a^b \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > a^b \end{cases} \end{array}\right.$$

Dạng 3: Với bất phương trình:

$$\log_a f(x) > b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > a^b \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < f(x) < a^b \end{cases} \end{array}\right..$$

Chú ý: Cần lưu ý tới giá trị của cơ số a đối với các bất phương trình logarit.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 1. Giải các bất phương trình:

a. $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{4x+6}{x} \geq 0.$

☐ $x > 0.$ ☐ $0 < x \leq 1.$ ☐ $x \geq -\dfrac{3}{2}.$ ☐ $-2 \leq x < -\dfrac{3}{2}.$

b. $\log_{1/5}(x^2 - 6x + 8) + 2\log_5(x - 4) > 0$.

☐ $x > 4$. ☐ $x < 2$. ☐ $0 < x < 1$. ☐ Vô nghiệm.

Bài tập 2. Giải các bất phương trình:

a. $\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < 1$.

☐ $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$. ☐ $(0, 2) \cup (3, +\infty)$.

☐ $(-1, \frac{1}{2}) \cup (\frac{7}{2}, 6)$. ☐ $(0, \frac{1}{2}) \cup (1, 2) \cup (3, 6)$.

b. $\log_x(5x^2 - 8x + 3) > 2$.

☐ $(-\infty, \frac{3}{5}) \cup (1, +\infty)$. ☐ $(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$.

☐ $(0, \frac{3}{5}) \cup (1, 4)$. ☐ $(-1, 0) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{5}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$.

Bài tập 3. Giải các bất phương trình:

a. $|\log_3 x - 2| < 1$.

☐ $(0, 27)$. ☐ $(3, +\infty)$. ☐ $(3, 27)$. ☐ $(0, 3)$,

b. $|1 + \log_x 2000| < 2$.

☐ $(0, 1) \cup (2000, +\infty)$. ☐ $(0, 1) \cup (2, 2000)$.

☐ $(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2000}}) \cup (2000, +\infty)$. ☐ $(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2000}}) \cup (1, +\infty)$.

Bài tập 4. Giải các bất phương trình:

a. $\sqrt{\log_3 \frac{2x - 3}{1 - x}} < 1$.

☐ $(\frac{6}{5}, \frac{4}{3}]$. ☐ $(1, \frac{3}{2})$. ☐ $(1, \frac{4}{3}]$. ☐ $(\frac{6}{5}, +\infty)$.

b. $\log_x(x - \frac{1}{4}) \geq 2$.

☐ $(\frac{1}{4}, +\infty)\backslash\{1\}$. ☐ $(\frac{1}{4}, 1)$. ☐ $(0, +\infty)\backslash\{1\}$. ☐ $(-\infty, 1)$.

c. $\frac{\log_3(3^x - 1)}{x - 1} \geq 1$.

☐ $(0, 1 - \log_3 2) \cup (1, +\infty)$. ☐ $(1 - \log_3 2, +\infty)$.

☐ $(0, +\infty)\backslash\{1\}$. ☐ $(0, 1 - \log_3 2)$.

d. $\log_{x^2}\left(\frac{4x - 2}{|x - 2|}\right) \geq \frac{1}{2}$.

☐ $(\frac{1}{2}, +\infty)\backslash\{2\}$. ☐ $(-1 + \sqrt{3}, 3 + \sqrt{7})\backslash\{2\}$.

☐ $(\frac{1}{2}, -1 + \sqrt{3})$. ☐ $(\frac{1}{2}, -1 + \sqrt{3}) \cup (1, 3 + \sqrt{7})\backslash\{2\}$.

Bài tập 5. Giải các bất phương trình:

a. $(0,08)^{-\frac{1}{2}\log_{x-0,5}x} \geq \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^{\log_{x-0,5}(2x-1)}$.

☐ $(0, +\infty)$. ☐ $(\frac{1}{2}, +\infty)$. ☐ $[1, \frac{3}{2})$. ☐ $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

b. $0.12^{\log_{x-1}x} \geq \left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^{\log_{x-1}(2x-1)}$.

☐ $(1, 2)$. ☐ $(1, +\infty)$. ☐ $(\frac{1}{2}, +\infty)$. ☐ $(\frac{1}{2}, 2)$.

c. $\log_{\frac{2}{3}} \log_3 |x - 3| \geq 0$.

☐ $\mathbf{R}\backslash\{3\}$. ☐ $[0, 2) \cup (4, 6]$.

☐ $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$. ☐ $[2, 3) \cup (4, +\infty)$.

d. $(4^x - 12.2^x + 32)\log_2(2x - 1) \leq 0$.

☐ $(\frac{1}{2}, +\infty)$. ☐ $(\frac{1}{2}, 1] \cup [2, 3]$.

☐ $[1, 2] \cup [3, +\infty)$. ☐ $[2, 3] \cup (8, +\infty)$.

Bài tập 6. Cho bất phương trình:

$$\log_{\frac{1}{2}}[\log_2(3^x + 1)] > \log_2\frac{1}{m}.$$

a. Giải bất phương trình với m = 2.

☐ $(-\infty, 1)$. ☐ $(1, 2)$. ☐ $(-\infty, 2)$. ☐ $(1, +\infty)$.

b. Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x < 0$.

☐ $m \geq 1$. ☐ $0 < m < 1$. ☐ $m < 2$. ☐ $m > 9$.

Bài tập 7. Cho bất phương trình:

$$\log_2(x^2 - 16) \geq \log_2(4mx - 11).$$

a. Giải bất phương trình với m = 1.

☐ $(-\infty, 5]$. ☐ $[5, +\infty)$. ☐ $(-\infty, -\sqrt{17})$. ☐ $(\sqrt{17}, +\infty)$.

b. Tìm m để tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty, -5]$.

☐ $m = 1$. ☐ $m = -1$. ☐ $m = 4$. ☐ Vô nghiệm.

Bài tập 8. Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm:

$$\log_{x+m}[x(m - x)] < \log_{x+m}x.$$

Bài tập 9. Tìm các nghiệm (x, y) của bất phương trình:

$$\log_{x^2+y^2}(x + y) \geq 1$$

có tổng x + 2y lớn nhất.

Bài tập 10. Giải và biện luận các bất phương trình:

a. $\log_a(1 - 4a^{-x}) \ge 2(1 - x)$. b. $\log_a(1 - 8a^{-x}) \ge 2(1 - x)$.

Bài toán 2: Sử dụng các phép biến đổi logarit.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta sử dụng các phép biến đổi logarit đã biết.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 11. Giải các bất phương trình:

a. $3^{(\log_3 x)^2} + x^{\log_3 x} < 6$.

☐ $(\frac{1}{3}, 3)$. ☐ $(0, +\infty)$. ☐ $(-3, 2)$. ☐ $(\log_3 2, 1)$.

b. $\log_3 x > \log_5 x$.

☐ $(-\infty, 1)$. ☐ $(1, +\infty)$. ☐ $(0, +\infty)$. ☐ $(0, 1)$.

c. $\dfrac{\log_a(35 - x^3)}{\log_a(5 - x)} > 3$.

☐ $(-\infty, 5)$. ☐ $(-\infty, \sqrt[3]{35})$. ☐ $(\sqrt[3]{35}, 5)$. ☐ $(2, 3)$.

Bài tập 12. Giải các bất phương trình:

a. $\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}}(1 + \sqrt[3]{x - 1})$.

☐ $(0, +\infty)$. ☐ $(0, 1) \cup (9, +\infty)$.
☐ $(1, +\infty)$. ☐ $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

b. $\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}(x - 1) > \log_{\frac{1}{2}}(1 + \sqrt[3]{x - 2})$.

☐ $(1, +\infty)$. ☐ $(1, 2) \cup (10, +\infty)$.
☐ $(2, +\infty)$. ☐ $(2, 10)$.

Bài tập 13. Với $0 < a \ne 1$, giải bất phương trình:

$$a^{\log_a^2 x} + x^{\log_a x} < 2a.$$

Bài tập 14. Giải và biện luận các bất phương trình:

$$x^{\log_a x + 1} > a^2x.$$

Bài toán 3: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 1.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Mục đích chính của phương pháp này là chuyển các bài toán đã cho về bất phương trình đại số quen biết đặc biệt là các bất phương trình bậc 2 hoặc các hệ bất phương trình.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 15. Giải các bất phương trình:

a. $\log_2(5^x + 2) + 2\log_{5^x+2} 2 - 3 > 0$.

☐ $(-\infty, 2)$. ☐ $(5, +\infty)$. ☐ $(2, 5)$. ☐ $(\log_5 2, +\infty)$.

b. $3^{\log_3^2 x} - 18\,x^{\log_3 \frac{1}{x}} + 3 > 0$.

☐ $(0, 3)$. ☐ $(3, +\infty)$. ☐ $(0, \log_3 2)$. ☐ $(\log_3 2, 3)$.

c. $x^{\log_2 x} + x^{5\log_x 2 - \log_2 x} - 18 < 0$.

☐ $(0, +\infty)$. ☐ $(0, 2) \cup (4, +\infty)$.

☐ $(0, \frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{2}, 2)$. ☐ $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \cup (2, 4)$.

Bài tập 16. Cho bất phương trình:

$$\log_2^2 x - 2(m + 1)\log_2 x + m^2 + 2m \leq 0.$$

a. Giải bất phương trình với m = 1.

☐ $(-\infty, 0)$. ☐ $[1, 2]$. ☐ $[2, 8]$. ☐ Vô nghiệm.

b. Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in [1, 2]$.

☐ $-1 \leq m \leq 0$. ☐ $m = 1$. ☐ $0 \leq m \leq 1$. ☐ $-1 \leq m \leq 1$.

Bài tập 17. Giải và biện luận bất phương trình:

a. $\dfrac{1 + \log_a^2 x}{1 + \log_a x} > 1$. b. $\dfrac{1}{5 - \log_a x} + \dfrac{2}{1 + \log_a x} < 1$.

Bài tập 18. Giải và biện luận bất phương trình:

$$\frac{\log_a^2 x - 3\log_a x - 2}{\log_a x - 1} \geq 2(\log_a x + 1).$$

Bài tập 19. Giải và biện luận bất phương trình:

$$\log_3 x + \log_x 3 + 2\cos\alpha \leq 0.$$

Bài toán 4: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 2.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ý tưởng của phương pháp này cũng giống như phương trình logarit.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 20. Giải các bất phương trình:

a. $\log_2^2 x - \log_3(9x).\log_2 x + \log_3 x^2 > 0$.

☐ $(0, +\infty)$. ☐ $(0, 4) \cup (6, +\infty)$.

☐ $(0, 1) \cup (4, +\infty)$. ☐ $(0, 1) \cup (4, 6)$.

b. $\log_3^2 x + (x - 10)\log_3 x - 9(x - 1) < 0.$

☐ $(0, +\infty)$. ☐ $(1, 10)$. ☐ $(1, 3^9)$. ☐ Vô nghiệm.

Bài tập 21. Giải bất phương trình:

$$\log_3^2 x - \log_2(8x).\log_3 x + \log_2 x^3 < 0.$$

☐ $(0, +\infty)$.
☐ $(0, 1) \cup (8, 27)$.
☐ $(0, 4) \cup (8, +\infty)$.
☐ $(0, 1) \cup (27, +\infty)$.

Bài tập 22. Giải bất phương trình:

$$\log_2^2 x + (x - 2)\log_3 x - x + 1 > 0.$$

Bài tập 23. Giải bất phương trình:

$$2\log_3^2 x - (x + 1)\log_3 x + x - 1 < 0.$$

Bài toán 5: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 3.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ý tưởng của phương pháp này cũng giống như phương trình logarit.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 24. Giải bất phương trình:

$$\log_3 x.\log_2 x > \log_2 x^2 + \log_3 \frac{x}{9}.$$

Bài tập 25. Giải các bất phương trình:

a. $\log_3 x.\log_2 x < \log_3 x^2 + \log_2 \frac{x}{4}.$

b. $\log_x 2.\log_x 5 - \log_x 2 + \log_x 5 > \log_x^2 5.$

Bài tập 26. Tìm m để nghiệm của bất phương trình sau chứa khoảng $(2, +\infty)$:

$$\log_3 x.\log_2 x + 2m > \log_2 x^m + \log_3 x^2.$$

Bài tập 27. Cho bất phương trình:

$$\log_3^2 x - m\log_3 x < \log_2 x.\log_3 x - m\log_2 x.$$

a. Giải bất phương trình với m = 1.

b. Tìm m để nghiệm của bất phương trình chứa khoảng (1, 9).

Bài toán 6: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 4.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ý tưởng của phương pháp này cũng giống như phương trình logarit.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 28. Cho bất phương trình:

$$\left|\log_2\left(\frac{1}{\sin x}-\cot gx\right)\right| - \left|\log_2\left(\frac{1}{\sin x}+\cot gx\right)\right| < m.$$

a. Giải bất phương trình với m = 1.

b. Tìm m để bất phương trình có nghiệm.

Bài tập 29. Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm:

$$\left|\log_2\left(\frac{1}{\cos x}-tgx\right)\right| - \left|\log_2\left(\frac{1}{\cos x}+tgx\right)\right| < m.$$

Bài tập 30. Cho bất phương trình:

$$\sqrt{\log_3 x^2 - m} \geq \log_3 x.$$

a. Giải bất phương trình với m = 1.

b. Tìm m để nghiệm của bất phương trình chứa đoạn [1, 3].

Bài toán 7: Sử dụng tính chất đơn điệu của hàm số.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ý tưởng của phương pháp này cũng giống như phương trình logarit.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 31. Giải các bất phương trình:

a. $x + \log_3 x < 4$.

☐ $(3, +\infty)$. ☐ $(-\infty, 3)$. ☐ $(0, 3)$. ☐ Vô nghiệm.

b. $x + \log_2 x > 1$.

☐ $(1, +\infty)$. ☐ $(-\infty, 1)$. ☐ $(0, 1)$. ☐ Vô nghiệm.

c. $x^2 + 2x + \log_2 x > 3$.

☐ $(1, +\infty)$. ☐ $(-\infty, 1)$. ☐ $(0, 1)$. ☐ Vô nghiệm.

d. $2^x + \log_2 x > 2$

☐ $(1, +\infty)$. ☐ $(-\infty, 1)$. ☐ $(0, 1)$. ☐ Vô nghiệm.

Bài tập 32. Giải các bất phương trình:

a. $\log_2 x + \log_3(x + 1) < 2$.

☐ $(0, +\infty)$. ☐ $(1, 2)$. ☐ $(0, 2)$. ☐ Vô nghiệm.

b. $\log_2\sqrt{x+1} + \log_3\sqrt{x+9} > 1$.

☐ $(-1, +\infty)$. ☐ $(0, +\infty)$. ☐ $(-9, -1)$. ☐ Vô nghiệm.

Bài tập 33. Giải bất phương trình:

$$x^2 + (\log_2 x - 2)x + \log_2 x - 3 > 0.$$

☐ $(0, +\infty)$. ☐ $(2, +\infty)$. ☐ $(0, 2)$. ☐ Vô nghiệm.

Bài tập 34. Giải bất phương trình:

$$\log_3 \frac{\sqrt{x^2 - x - 12}}{7 - x} + x \le 7 - \sqrt{x^2 - x - 12}.$$

☐ $(7, +\infty)$. ☐ $(-\infty, -3) \cup (4, +\infty)$.

☐ $(\log_3 12, 9) \cup (11, \frac{23}{2})$. ☐ $(-\infty, -3) \cup (4, \frac{61}{13})$.

Bài tập 35. Cho bất phương trình:

$$x^2 - (m + 4)x + 4m < (m - x)\log_3 x.$$

a. Giải bất phương trình khi $m = 2$.

b. Giải và biện luận bất phương trình.

Bài toán 8: Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ý tưởng của phương pháp này cũng giống như phương trình logarit.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 36. Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm duy nhất:

a. $\log_m(x^2 + 2) \le \log_2 m$.

b. $\log_{|x| + 2}(|x| + 1) + \log_2(1 + m^2) \le 0$.

c. $\log_{m^2 + 1}(2 - \sqrt{x^2 + 1}) \ge (m - 1)^2$.

Bài tập 37. Tìm a, b, c để mọi $x \in [-1, 1]$ luôn có:

$$\log_3|4x^3 + ax^2 + bx + c| \le 0.$$

Bài toán 9: Sử dụng phương pháp đánh giá.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ý tưởng của phương pháp này cũng giống như phương trình logarit.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 38. Giải bất phương trình:

$$\log_{x+1}(2x) \le 1 - \log_2 x.$$

☐ $(0, +\infty)$. ☐ $(0, 1]$. ☐ $[1, +\infty)$. ☐ Vô nghiệm.

Bài tập 39. Giải bất phương trình:

$$\left|\log_{\frac{1}{3}}(1+\cos 2x)\right| + \left|\log_3 2 - \log_{\frac{1}{3}}(\sin^2 x)\right| < 1.$$

Bài tập 40. Giải các bất phương trình sau:

a. $\log_3(x^2+2) + \log_{x^2+2}(x^2+1) + \log_{x^2+1} 3 \geq 3.$

b. $\log_2(\sqrt{x-2}+4) \leq \log_3\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}+8\right).$

III. HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. $-2 \leq x < -\frac{3}{2}.$

b. Vô nghiệm.

Bài tập 2.

a. $(0, \frac{1}{2}) \cup (1, 2) \cup (3, 6).$

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách **trình bày sau:**

Cách 1: Bất phương trình tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>1\\5x^2-8x+3>x^2\end{cases}\\ \begin{cases}0<x<1\\0<5x^2-8x+3<x^2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>1\\4x^2-8x+3>0\end{cases}\\ \begin{cases}0<x<1\\5x^2-8x+3>0\\4x^2-8x+3<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}<x<\frac{3}{5}\end{array}\right..$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{5}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty).$

Cách 2: Bất phương trình tương đương với:

$$\log_x(5x^2-8x+3) > \log_x x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}0<x\neq 1\\5x^2-8x+3>0\\x^2>0\\(x-1)[5x^2-8x+3-x^2]<0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}<x<\frac{3}{5}\end{array}\right..$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{5}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty).$

Bài tập 3.

Điều kiện $x > 0$.

Biến đổi tương đương bất phương **trình về dạng:**

$- < \log_3 x - 2 < 1 \Leftrightarrow 1 < \log_3 x < 3 \Leftrightarrow 3 < x < 27$, **thoả mãn điều kiện.**

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $3 < x < 27$.

b. Điều kiện $0 < x \neq 1$.

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$-3 < \log_x 2000 < 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1 \\ x^{-3} < 2000 < x \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x^{-3} > 2000 > x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2000 \\ 0 < x < \dfrac{1}{\sqrt[3]{2000}} \end{array}\right..$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $x \in (0, \dfrac{1}{\sqrt[3]{2000}}) \cup (2000, +\infty)$.

Bài tập 4.

a. Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\begin{cases} \dfrac{2x-3}{1-x} > 0 \\ 0 \le \log_3 \dfrac{2x-3}{1-x} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x-3}{1-x} > 0 \\ 1 \le \dfrac{2x-3}{1-x} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x-3}{1-x} \ge 1 \\ \dfrac{2x-3}{1-x} < 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x-4}{1-x} \ge 0 \\ \dfrac{5x-6}{1-x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x \le \dfrac{4}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x > 6/5 \\ x < 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \frac{6}{5} < x \le \frac{4}{3}.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $\dfrac{6}{5} < x \le \dfrac{4}{3}$.

b. Điều kiện $\dfrac{1}{4} < x \neq 1$. (*)

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\log_x(x - \frac{1}{4}) \ge \log_x x^2 \Leftrightarrow (x-1)(x - \frac{1}{4} - x^2) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(4x^2 - 4x + 1) \le 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x-1)^2 \le 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 1 = 0 \\ x - 1 \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1/2 \\ x \le 1 \end{array}\right. \overset{(*)}{\Leftrightarrow} x < 1.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x < 1$.

c. $x \in (0, 1 - \log_3 2) \cup (1, +\infty)$.

d. Điều kiện $\dfrac{1}{2} < x \neq 1$ và $x \neq 2$. (*)

Bất phương trình tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 > 1 \\ \dfrac{4x-2}{|x-2|} \ge (x^2)^{1/2} \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x^2 < 1 \\ \dfrac{4x-2}{|x-2|} \le (x^2)^{1/2} \end{cases} \end{array}\right. \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x^2 > 1 \\ 4x - 2 \ge x|x-2| \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} \dfrac{1}{2} < x < 1 \\ 4x - 2 \le x|x-2| \end{cases} & (2) \end{array}\right. . \qquad (I)$$

- Giải (1) ta biến đổi:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-2>0\\ 4x-2\ge x(x-2)\end{cases}\\ \begin{cases}x-2<0\\ 4x-2\ge x(2-x)\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>2\\ x^2-6x+2\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}x<2\\ x^2+2x-2\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2<x\le 3+\sqrt{7}\\ x\le -1-\sqrt{3}\\ -1+\sqrt{3}\le x<2\end{array}\right.$$

- Giải (2) ta biến đổi:

$$\begin{cases}\frac{1}{2}<x<1\\ 4x-2\le x(2-x)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{2}<x<1\\ x^2+2x-2\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2}<x\le -1+\sqrt{3}.$$

Khi đó, hệ (I) có dạng:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x|>1\\ \left[\begin{array}{l}2<x\le 3+\sqrt{7}\\ x\le -1-\sqrt{3}\\ -1+\sqrt{3}\le x<2\end{array}\right.\end{cases}\\ \frac{1}{2}<x\le -1+\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2<x\le 3+\sqrt{7}\\ x\le -1-\sqrt{3}\\ 1<x<2\\ \frac{1}{2}<x\le -1+\sqrt{3}\end{array}\right. \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l}2<x\le 3+\sqrt{7}\\ 1<x<2\\ \frac{1}{2}<x\le -1+\sqrt{3}\end{array}\right..$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x\in(\frac{1}{2}, -1+\sqrt{3})\cup(1, 3+\sqrt{7})\setminus\{2\}$.

Bài tập 5.

a. Nhận xét rằng:

$$0{,}08=\frac{2}{25}=\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^{2}=\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^{-2}.$$

Bất phương trình được viết lại dưới dạng:

$$\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^{\log_{x-0,5}x}\ge\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^{\log_{x-0,5}(2x-1)}. \Leftrightarrow \log_{x-0,5}x\ge\log_{x-0,5}(2x-1)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-0{,}5>1\\ x\ge 2x-1>0\end{cases}\\ \begin{cases}0<x-0{,}5<1\\ 0<x\le 2x-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}<x\le 1\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\\ x\ge 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow 1\le x<\frac{3}{2}.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm là $1\le x<\frac{3}{2}$.

b. Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$\left(\frac{3}{25}\right)^{\log_{x-1}x} \ge \left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^{\log_{x-1}(2x-1)}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^{-2\log_{x-1}x} \ge \left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^{\log_{x-1}(2x-1)}$$

$$\Leftrightarrow \log_{x-1}x^{-2} \ge \log_{x-1}(2x-1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1>1\\ x^{-2}\ge 2x-1>0\end{cases}\\ \begin{cases}0<x-1<1\\ 0<x^{-2}\le 2x-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow 1<x<2.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $1 < x < 2$.

c. Biến đổi tương đương bất phương trình về dạng:

$$0 < \log_3|x-3| \le 1 \Leftrightarrow 1 < |x-3| \le 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x-3>1\\ x-3<-1\end{array}\right.\\ -3\le x-3\le 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>4\\ x<2\end{array}\right.\\ 0\le x\le 6\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4<x\le 6\\ 0\le x<2\end{array}\right..$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $x \in [0, 2) \cup (4, 6]$.

d. Đặt $t = 2^x$, $t > 0$.

Bất phương trình tương đương với:

$$(t^2 - 12t + 32)\log_2(2x-1) \le 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}t^2-12t+32\ge 0\\ \log_2(2x-1)\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}t^2-12t+32\le 0\\ \log_2(2x-1)\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t\ge 8\\ t\le 4\end{array}\right.\\ 0<2x-1\le 1\end{cases}\\ \begin{cases}4\le t\le 8\\ 2x-1\ge 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}2^x\ge 8\\ 2^x\le 4\end{array}\right.\\ \frac{1}{2}<x\le 1\end{cases}\\ \begin{cases}4\le 2^x\le 8\\ x\ge 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge 3\\ x\le 2\end{array}\right.\\ \frac{1}{2}<x\le 1\end{cases}\\ \begin{cases}2\le x\le 3\\ x\ge 1\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}<x\le 1\\ 2\le x\le 3\end{array}\right..$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x \in (\frac{1}{2}, 1] \cup [2,3]$.

Bài tập 6. Biến đổi tương đương bất phương trình về dạng:

$$\log_{\frac{1}{2}}[\log_2(3^x+1)] > \log_{\frac{1}{2}} m \Leftrightarrow 0 < \log_2(3^x+1) < m$$

$$\Leftrightarrow 1 < 3^x + 1 < 2^m \Leftrightarrow 0 < 3^x < 2^m - 1 \Leftrightarrow 3^x < 2^m - 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2^m-1>0\\ x<\log_3(2^m-1)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>0\\ x<\log_3(2^m-1)\end{cases}.$$

a. Với m = 2, ta được:

$$\begin{cases} 2 > 0 \\ x < \log_3(2^2 - 1) \end{cases} \Leftrightarrow x < 1.$$

Vậy, với m = 2 nghiệm của bất phương trình là $x < 1$.

b. Để bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x < 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \log_3(2^m - 1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 2^m - 1 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 2^m \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1.$$

Vậy, với $m \geq 1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 7. Biến đổi tương đương bất phương trình về dạng:

$$\begin{cases} 4mx - 11 > 0 \\ x^2 - 16 \geq 4mx - 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4mx > 11 \\ x^2 - 4mx - 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4mx > 11 \\ \left[\begin{array}{l} x \geq 2m + \sqrt{4m^2 + 5} \\ x \leq 2m - \sqrt{4m^2 + 5} \end{array}\right. \end{cases}. \text{(I)}$$

a. Với m = 1, ta được:

$$\begin{cases} 4x > 11 \\ x^2 - 4x - 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{11}{4} \\ \left[\begin{array}{l} x \geq 5 \\ x \leq -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{11}{4} \\ \left[\begin{array}{l} x \geq 5 \\ x \leq -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 5.$$

Vậy, với m = 1 nghiệm của bất phương trình là $x \geq 5$.

b. Nhận xét từ hệ (I), để tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty, -5]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \dfrac{11}{4m} > -5 \\ 2m - \sqrt{4m^2 + 5} = -5 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

Vậy, với $m = -1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 8. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 9. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 10.

a. Ta xét các trường hợp:

- Với $a \leq 0$ hoặc $a = 1$, bất phương trình vô nghiệm.
- Với $0 < a \neq 1$

Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$\log_a(1 - 4a^{-x}) \geq \log_a[a^{2(1-x)}]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ 1 - 4a^{-x} \geq a^{2(1-x)} \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < 1 - 4a^{-x} \leq a^{2(1-x)} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ a^{2x} - 4a^x - a^2 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ a^x > 4 \\ a^{2x} - 4a^x - a^2 \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ a^x \ge 2 + \sqrt{4 + a^2} \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 4 < a^x \le 2 + \sqrt{4 + a^2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ x \ge \log_a(2 + \sqrt{4 + a^2}) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ \log_a(2 + \sqrt{4 + a^2}) \le x < \log_a 4 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy:

- Với $a \le 0$ hoặc $a = 1$, bất phương trình vô nghiệm.
- Với $a > 1$, bất phương trình có nghiệm $x \ge \log_a(2+\sqrt{4 + a^2})$
- Với $0 < a \ne 1$, bất phương trình có nghiệm $\log_a(2+\sqrt{4 + a^2}) \le x \le \log_a 4$.

b. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 11.

a. $(\frac{1}{3}, 3)$.

b. Điều kiện $x > 0$.

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\log_3 x > \log_5 3.\log_3 x \Leftrightarrow (1 - \log_5 3)\log_2 x > 0 \overset{\log_3 2<1}{\Leftrightarrow} \log_3 x < 0 \Leftrightarrow x < 1.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x < 1$.

Điều kiện:

$$\begin{cases} 0 < a \ne 1 \\ \log_a(5 - x) \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \ne 1 \\ x \ne 4 \end{cases}$$

Bất phương trình tương đương với:

$$\log_{5-x}(35 - x^3) > 3$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5 - x > 1 \\ 35 - x^3 > (5 - x)^3 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < 5 - x < 1 \\ 0 < 35 - x^3 < (5 - x)^3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 4 \\ x^2 - 5x + 6 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4 < x < 5 \\ x < \sqrt[3]{35} \\ x^2 - 5x + 6 > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 2 < x < 3.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $2 < x < 3$.

Bài tập 12.

a. Điều kiện $x > 0$.

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x} < \log_{\frac{1}{3}}(1 + \sqrt[3]{x - 1}) \Leftrightarrow \sqrt{x} > 1 + \sqrt[3]{x - 1}$$

$$\xleftrightarrow{x>0 \to 1+\sqrt[3]{x-1}>0} x > (1 + \sqrt[3]{x - 1})^2 \Leftrightarrow x > 1 + 2\sqrt[3]{x - 1} + (\sqrt[3]{x - 1})$$

$$\Leftrightarrow x - 1 - (\sqrt[3]{x - 1})^2 - 2\sqrt[3]{x - 1} > 0. \qquad (2$$

Đặt $t = \sqrt[3]{x-1} \xrightarrow{x>0} t > -1$.

Khi đó, bất phương trình (2) có dạng:

$$t^3 - t^2 - 2t > 0 \Leftrightarrow t(t^2 - t - 2) > 0 \Leftrightarrow t(t+1)(t-2)>0 \xleftrightarrow{t+1>0} t(t-2) > 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t > 2 \\ t < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{x-1} > 2 \\ \sqrt[3]{x-1} < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1 > 8 \\ x-1 < 0 \end{array}\right. \xleftrightarrow{x>0} \left[\begin{array}{l} x > 9 \\ 0 < x < 1 \end{array}\right.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x > 9$ hoặc $0 < x < 1$.

b. $(2, 10)$.

Bài tập 13. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 14. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 15.

a. Đặt $t = \log_2(5^x + 2)$, điều kiện $t > 1 \Rightarrow \log_{5^x+2} 2 = \frac{1}{t}$.

Khi đó, bất phương trình có dạng:

$$t + \frac{2}{t} - 3 > 0 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t < 1 & (l) \\ t > 2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \log_2(5^x + 2) > 2 \Leftrightarrow 5^x + 2 > 4 \Leftrightarrow 5^x > 2 \Leftrightarrow x > \log_5 2.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x > \log_5 2$.

b. Điều kiện $x > 0$.

Đặt $t = \log_3 x \Rightarrow x = 3^t$.

Khi đó, bất phương trình ban đầu (kí hiệu là (1)) có dạng:

$$3^{t^2} - 18(3^t)^{-t} + 3 > 0 \Leftrightarrow 3^{t^2} - \frac{18}{3^{t^2}} + 3 > 0. \qquad (2)$$

Đặt $u = 3^{t^2}$, điều kiện $u \geq 1$.

Khi đó, bất phương trình (2) có dạng:

$$u - \frac{18}{u} + 3 > 0 \Leftrightarrow u^2 + 3u - 18 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} u < -6 & (l) \\ u > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow 3^{t^2} > 3$$

$$\Leftrightarrow t^2 > 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < -1 \\ t > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x < -1 \\ \log_3 x > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x < -\frac{1}{3} & (l) \\ x > 3 \end{array}\right..$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x > 3$.

c. Điều kiện $x > 0$.

Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$x^{\log_2 x} + \frac{\left(x^{\log_x 2}\right)^5}{x^{\log_2 x}} - 18 < 0 \Leftrightarrow x^{\log_2 x} + \frac{32}{x^{\log_2 x}} - 18 < 0.$$

Đặt t = $x^{\log_2 x}$, điều kiện t > 0, khi đó bất phương trình có dạng:

$$t + \frac{32}{t} - 18 < 0 \Leftrightarrow t^2 - 18t + 32 < 0 \Leftrightarrow 2 < t < 16 \Leftrightarrow 2 < x^{\log_2 x} < 16$$

$$\Leftrightarrow \log_2 2 < \log_2 x^{\log_2 x} < \log_2 16 \Leftrightarrow 1 < (\log_2 x)^2 < 4$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < \log_2 x < 2 \\ -2 < \log_2 x < -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 < x < 4 \\ \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2} \end{array}\right..$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \cup (2, 4)$.

Bài tập 16. Kí hiệu bất phương trình ban đầu là (1).

Điều kiện x > 0.

Đặt t = $\log_2 x$, khi đó bất phương trình có dạng:

$$f(t) = t^2 - 2(m + 1)t + m^2 + 2m \le 0. \qquad (2)$$

a. Với m = 1, ta được:

$$t^2 - 4t + 3 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le t \le 3 \Leftrightarrow 1 \le \log_2 x \le 3 \Leftrightarrow 2 \le x \le 8.$$

Vậy, với m = 1 bất phương trình có nghiệm $2 \le x \le 8$.

b. Với $x \in [1, 2]$, ta có biến đổi :

$$1 \le x \le 2 \Leftrightarrow \log_2 1 \le \log_2 x \le \log_2 2 \Leftrightarrow 0 \le t \le 1.$$

Vậy (1) nghiệm đúng với mọi $x \in [1, 2]$

$\Leftrightarrow$ (2) nghiệm đúng với mọi $t \in [0, 1]$

$\Leftrightarrow$ f(t) = 0 có hai nghiệm t_1, t_2 thoả mãn $t_1 \le 1 < 2 \le t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} af(0) \le 0 \\ af(1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m \le 0 \\ m^2 - 1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le m \le 0.$$

Vậy, với $-1 \le m \le 0$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 17. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 18. Kí hiệu bất phương trình ban đầu là (1). Điều kiện:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \log_a x - 1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \ne a \end{cases}$$

a. Với $a \le 0$ hoặc $a = 1$, thì (1) vô nghiệm.

b. Với $0 < a \ne 1$

Đặt t = $\log_a x$.

Khi đó bất phương trình (1) được biến đổi về dạng:

$$\frac{t^2 - 3t - 2}{t - 1} \ge 2(t + 1) \Leftrightarrow \frac{t^2 + 3t}{t - 1} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \le -3 \\ 0 \le t < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_a x \le -3 \\ 0 \le \log_a x < 1 \end{array}\right.. \qquad (I)$$

- Với $a > 1$ thì:

$$(I) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le a^{-3} \\ 1 \le x < a \end{array}\right. \xleftrightarrow{x>0} \left[\begin{array}{l} 0 < x \le a^{-3} \\ 1 \le x < a \end{array}\right. .$$

- Với $0 < a < 1$ thì:

$$(I) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge a^{-3} \\ a < x \le 1 \end{array}\right. .$$

Vậy, ta có kết luận:

- Với $a \le 0$ hoặc $a = 1$, (1) vô nghiệm.
- Với $a > 1$, (1) có nghiệm $(0, a^{-3}] \cup [1, a)$.
- Với $0 < a < 1$, (1) có nghiệm $(a, 1] \cup [a^{-3}, +\infty)$.

Bài tập 19. Điều kiện $0 < x \ne 1$.

Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$\log_3 x + \frac{1}{\log_3 x} + 2\cos\alpha \le 0.$$

Đặt $t = \log_3 x$, ta được:

$$t + \frac{1}{t} + 2\cos\alpha \le 0. \qquad (1)$$

a. Nếu $x > 1$, thì $t = \log_3 x > 0$. Khi đó, phương trình (1) tương đương với:

$$t^2 + 2t\cos\alpha + 1 \le 0. \qquad (2)$$

$$\Delta' = \cos^2\alpha - 1 \le 0,$$

do đó bất phương trình (2) có nghiệm khi

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow \cos^2\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\alpha = 1 \\ \cos\alpha = -1 \end{array}\right. .$$

Khi đó, nghiệm của (2) là $t = -\cos\alpha$.

- Vì $t > 0 \Leftrightarrow -\cos\alpha > 0 \Leftrightarrow \cos\alpha < 0$, suy ra $\cos\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = \pi + 2k\pi$.
- Với $t = 1 \Leftrightarrow \log_3 x = 1 \Leftrightarrow x = 3$.

b. Nếu $0 < x < 1$, thì $t = \log_3 x < 0$.

Khi đó, bấtphương trình (1) tương đương với:

$$t^2 + 2t\cos\alpha + 1 \ge 0. \qquad (3)$$

$$\Delta' = \cos^2\alpha - 1 \le 0,$$

do đó bất phương trình (3) có nghiệm với mọi α.

Vậy:

- Với $\alpha = \pi + 2k\pi$ bất phương trình có nghiệm $x = 3$ và $0 < x < 1$.
- Với $\alpha \ne \pi + 2k\pi$ bất phương trình có nghiệm $0 < x < 1$.

Bài tập 20.

a. Điều kiện $x > 0$.

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\log_2^2 x - (2 + \log_3 x).\log_2 x + 2\log_3 x > 0.$$

Đặt $t = \log_2 x$, khi đó bất phương trình có dạng:

$$f(t) = t^2 - (2 + \log_3 x).t + 2\log_3 x > 0 \qquad (2)$$

ta có $\Delta = (2 + \log_3 x)^2 - 8\log_3 x = (2 - \log_3 x)^2$, do đó $f(t) = 0$ có nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = \log_3 x \end{array}\right. .$$

Vậy:

$$(2) \Leftrightarrow (t - 2)(t - \log_3 x) > 0 \Leftrightarrow (\log_2 x - 2)(\log_2 x - \log_3 x) > 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_2 x - 2 > 0 \\ \log_2 x - \log_3 x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_2 x - 2 < 0 \\ \log_2 x - \log_3 x < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_2 x > 2 \\ \log_2 x > \log_3 x \end{cases} \\ \begin{cases} \log_2 x < 2 \\ \log_2 x < \log_3 x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 4 \\ x > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 4 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 4 \\ 0 < x < 1 \end{array}\right. .$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm là tập $(0, 1) \cup (4, +\infty)$.

b. Điều kiện $x > 0$.

Đặt $t = \log_2 x$.

Bất phương trình có dạng:

$$f(t) = t^2 + (x - 10).t - 9(x - 1) < 0 \qquad (2)$$

ta có $\Delta' = (x - 10)^2 + 36(x - 1) = (x - 8)^2$, do đó $f(t) = 0$ có nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} t = 1 - x \\ t = 9 \end{array}\right. .$$

Vậy:

$$(2) \Leftrightarrow (t + x - 1)(t - 9) < 0 \Leftrightarrow (\log_3 x + x - 1)(\log_3 x - 9) < 0. \qquad (3)$$

Trước hết ta đi giải phương trình $\log_3 x + x - 1 = 0$ để xác định dấu củ nó.

Viết lại phương trình dang:

$$\log_3 x = 1 - x.$$

Vế trái của phương trình là một hàm đồng biến trên $(0, +\infty)$ và vế phải l hàm nghịch biến, do đó phương trình nếu có nghiệm thì nghiệm đó là du nhất. Nhận xét rằng với $x = 1$ là nghiệm.

Khi đó:

$$(3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_3 x > 1 - x \\ \log_3 x < 9 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_3 x < 1 - x \\ \log_3 x > 9 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1 \\ x < 3^9 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x > 3^9 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 1 < x < 3^9.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $1 < x < 3^9$.

Bài tập 21. Kí hiệu bất phương trình ban đầu là (1).

Điều kiện $x > 0$. Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\log_3^2 x - (3 + \log_2 x).\log_3 x + 3\log_2 x < 0.$$

Đặt $t = \log_3 x$, khi đó bất phương trình có dạng:

$$f(t) = t^2 - (3 + \log_2 x).t + 3\log_2 x < 0 \qquad (2)$$

ta có $\Delta = (3 + \log_2 x)^2 - 12\log_2 x = (3 - \log_2 x)^2$, do đó $f(t) = 0$ có nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = \log_2 x \end{array}\right..$$

Do đó, (2) tương đương với:

$$(t - 3)(t - \log_2 x) < 0 \Leftrightarrow (\log_3 x - 3)(\log_3 x - \log_2 x) < 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_3 x - 3 > 0 \\ \log_3 x - \log_2 x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_3 x - 3 < 0 \\ \log_3 x - \log_2 x > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_3 x > 3 \\ \log_3 x < \log_2 x \end{cases} \\ \begin{cases} \log_3 x < 3 \\ \log_3 x > \log_2 x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 27 \\ x > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 27 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 27 \\ 0 < x < 1 \end{array}\right..$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm là tập $(0, 1) \cup (27, +\infty)$.

Bài tập 22. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 23. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 24. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 25. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 26. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 27. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 28. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 29. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 30. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 31.

a. $(0, 3)$.

b. Điều kiện $x > 0$.

Hàm số $f(x) = x + \log_2 x$ là hàm đồng biến trên $D = (0, +\infty)$.

Ta có $f(1) = 1$, do đó:

- Nếu $x > 1$ thì

  $f(x) > f(1) \Leftrightarrow x + \log_2 x > 1$, nên $x > 1$ là nghiệm.

- Nếu $0 < x \leq 1$ thì

  $f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow x + \log_2 x \leq 1$, nên $0 < x \leq 1$ không phải là nghiệm.

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $x > 1$.

c. $x > 1$.

d. $x > 1$.

Bài tập 32.

a. $(0, 2)$.

b. Điều kiện:

$$\begin{cases} x+1>0 \\ x+9>0 \end{cases} \Leftrightarrow x > -1. \qquad (1)$$

Các hàm số $f_1(x) = \sqrt{x+1}$ và $f_2(x) = \sqrt{x+9}$ đồng biến trên miền $x > -1$

$\Rightarrow$ hàm số $f(x) = \log_2\sqrt{x+1} + \log_3\sqrt{x+9}$ đồng biến trên miền $x > -1$.

Ta có $f(0) = 1$, do đó:

- Nếu $x > 0$ thì

  $f(x) > f(0) \Leftrightarrow \log_2\sqrt{x+1} + \log_3\sqrt{x+9} > 1$, nên $x > 0$ là nghiệm.

- Nếu $-1 < x \le 0$ thì

  $f(x) \le f(0) \Leftrightarrow \log_2\sqrt{x+1} + \log_3\sqrt{x+9} \le 1$, nên $-1 < x \le 0$ không phải là nghiệm.

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $x > 0$.

Bài tập 33. Điều kiện $x > 0$. (*)

Coi bất phương trình ban đầu là bất phương trình bâc 2 theo ẩn x, ta có :

$$\Delta = (\log_2 x - 2)^2 - 4(\log_2 x - 3) = \log_2^2 x - 8\log_2 x + 16 = (\log_2 x - 4)^2$$

Do đó bất phương trình tương đương với:

$$(x+1)(x+\log_2 x - 3) > 0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} x + \log_2 x - 3 > 0 \Leftrightarrow \log_2 x > 3 - x. \quad (2)$$

- Hàm số $y = \log_2 x$ là hàm đồng biến
- Hàm số $y = 3 - x$ là hàm nghịch biến.
- Với $x > 2$, ta có :

  $\begin{cases} VT > 1 \\ VP < 1 \end{cases} \Rightarrow x > 2$ là nghiệm của bất phương trình (2).
- Với $0 < x \le 2$, ta có :

  $\begin{cases} VT < 1 \\ VP > 1 \end{cases} \Rightarrow 0 < x \le 2$ không là nghiệm của bất phương trình (2).

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $x > 2$.

Bài tập 34. Điều kiện:

$$\begin{cases} x^2 - x - 12 \ge 0 \\ \dfrac{\sqrt{x^2 - x - 12}}{7 - x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4 < x < 7 \\ x < -3 \end{array}\right. . \qquad (*)$$

Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$\log_3\sqrt{x^2 - x - 12} + \sqrt{x^2 - x - 12} \le \log_3(7 - x) + 7 - x. \qquad (2)$$

Xét hàm số $f(x) = \log_3 x + x$, thấy ngay hàm số đồng biến.

Khi đó (2) được biến đổi như sau :

$$f(\sqrt{x^2-x-12}) \le f(7-x) \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x-12} \le 7-x$$

$$\xleftrightarrow{(*)} x^2 - x - 12 \le (7-x)^2 \Leftrightarrow x \le \frac{61}{13} \xleftrightarrow{(*)} \left[\begin{array}{l} 4 < x < \dfrac{61}{13} \\ x < -3 \end{array}\right. .$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $x \in (-\infty, -3) \cup (4, \frac{61}{13})$.

Bài tập 35. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 36. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 37. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 38. Điều kiện $x > 0$.

Nhận xét rằng:

- Với $x > 1$, ta có:

  $2x > x + 1 \Leftrightarrow \log_{x+1}(2x) > \log_{x+1}(x+1) = 1 \Rightarrow VT > 1$.

  $\log_2 x > 0 \Leftrightarrow 1 - \log_2 x < 1 \Rightarrow VP < 1$.

  Vậy, trong trường hợp này bất phương trình vô nghiệm.

- Với $0 < x \le 1$, ta có:

  $2x \le x + 1 \Leftrightarrow \log_{x+1}(2x) \le \log_{x+1}(x+1) = 1 \Rightarrow VT \le 1$.

  $\log_2 x \le 0 \Leftrightarrow 1 - \log_2 x \ge 1 \Rightarrow VP \ge 1$.

  Vậy, trong trường hợp này bất phương trình nghiệm đúng.

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $(0, 1]$.

Bài tập 39. Điều kiện:

$$\begin{cases} 1 + \cos 2x > 0 \\ \sin^2 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x > 0 \\ \sin^2 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ne k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$$

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$|\log_3(2\cos^2 x)| + |\log_3(2\sin^2 x)| < 1.$ (2)

Nhận xét rằng $(2\cos^2 x).(2\sin^2 x) = \sin^2 2x \le 1$, do đó:

$\log_3(2\cos^2 x).\log_3(2\sin^2 x) \le 0.$ (3)

Từ nhận xét (3), ta được:

$$(2) \Leftrightarrow |\log_3(2\cos^2 x) - \log_3(2\sin^2 x)| < 1 \Leftrightarrow |\log_3 tg^2 x| < 1$$

$$\Leftrightarrow -1 < \log_3 tg^2 x < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < tg^2 x < 3$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{3} < tgx < -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} < tgx < \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{\pi}{3} + k\pi < x < -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ \dfrac{\pi}{6} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. .$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là

$$x \in (\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi) \cup (-\frac{\pi}{3} + k\pi, -\frac{\pi}{6} + k\pi), k \in \mathbf{Z}.$$

CHỦ ĐỀ 3

HỆ PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa: Hệ phương trình logarit là hệ phương trình chứa ẩn ở dưới dấu logarit.

II. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

Bài toán 1: Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Trong phần này chúng ta sử dụng phương pháp biến đổi tương đương đã biết để giải các hệ phương trình logarit.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 1. Giải các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} 4^{\sqrt{x}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-y} \\ 3^{\log_9 x} = \dfrac{y}{3} \end{cases}$.

☐ (1, 1). ☐ (1, 3). ☐ (4, 1). ☐ (9, 9).

b. $\begin{cases} (\sqrt{x+1} - 1)3^{y} = \dfrac{3\sqrt{4-x}}{x} \\ y + \log_3 x = 1 \end{cases}$.

☐ (−1, 1). ☐ (1, 1). ☐ (9, −1). ☐ (3, 0).

Bài tập 2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \log_4(x^2 + y^2) - \log_4(2x) + 1 = \log_4(x + 3y) \\ \log_4(xy + 1) - \log_4(4y^2 + 2y - 2x + 4) = \log_4 \dfrac{x}{y} - 1 \end{cases}.$$

☐ (1, 1) và (9, 9). ☐ (2, 1) và (2006. 2006).

☐ (1, 9) và (9, 1). ☐ (2, 1) và (α, α) với $\alpha \in \mathbf{R}^*$.

Bài tập 3. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 = y^4 \\ \log_2 \dfrac{x}{y} = m \log_y x \end{cases}.$$

a. Giải hệ phương trình với m = 1.

☐ (1, 1). ☐ (4, 2). ☐ (16, 4). ☐ (9, 3).

b. Tìm m để hệ có cặp nghiệm (x, y) thoả mãn $x > 1$ và $y < 4$.

☐ $m > 0$. ☐ $m < 2$. ☐ $0 < m < 1$. ☐ $1 < m < 2$.

Bài tập 4. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\log_3 x^2 - \log_3 y = 0 \\ |x|^3 + y^2 - my = 0 \end{cases}.$$

a. Giải hệ phương trình với $m = 2$.

☐ $(1, 1)$ và $(-1, 1)$. ☐ $(-1, 1)$ và $(3, 9)$.

☐ $(1, 1)$ và $(1, -1)$. ☐ $(1, -1)$ và $(9, 3)$.

b. Tìm m để hệ có nghiệm.

☐ $m > 0$. ☐ $m < 6$. ☐ $1 < m < 3$. ☐ $m > 3$.

Bài toán 2: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 5. Giải các hệ phương trình:

a. $$\begin{cases} 3^{\lg x} = 4^{\lg y} \\ (4x)^{\lg 4} = (3y)^{\lg 3} \end{cases}.$$

☐ $(1, 1)$. ☐ $(4, 3)$. ☐ $(1, 4)$. ☐ $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{3}\right)$.

b. $$\begin{cases} 4^{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}} = 32 \\ \log_3(x - y) = 1 - \log_3(x + y) \end{cases}.$$

☐ $(1, 1)$. ☐ $(1, 2)$. ☐ $(2, 1)$. ☐ Vô nghiệm.

Bài tập 6. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \log_{1+x}(1 - 2y + y^2) + \log_{1-y}(1 + 2x + x^2) = 4 \\ \log_{1+x}(1 + 2y) + \log_{1-y}(1 + 2x) = 2 \end{cases}.$$

☐ $(-1, 1)$. ☐ $(1, 1)$. ☐ $\left(-\dfrac{2}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$. ☐ $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Bài tập 7. Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4\lg x - m\lg y = -m - 1 \\ (m + 6)\lg x + 2\lg y = m + 3 \end{cases}.$$

Bài tập 8. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \ln(xy) = \ln^2 x + m \\ \ln(xy) = \ln^2 y + m \end{cases}.$$

a. Giải hệ phương trình với $m = 1$.

☐ $(1, 1)$. ☐ $(10, 1)$. ☐ $(1, 10)$. ☐ (e, e).

b. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm.

☐ $m \le 1$. ☐ $m \le 4$. ☐ $m > 0$. ☐ $0 < m < 1$.

Bài tập 9. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + 2\lg y = 3m \\ x - 3\lg y^2 = 1 \end{cases}.$$

a. Giải hệ phương trình với $m = 1$.

☐ $(1, 1)$. ☐ $(1, -1)$. ☐ $(7, 10)$. ☐ $(4, \sqrt{10})$.

b. Tìm m để hệ có cặp nghiệm (x, y) thoả mãn $x \ge 1$.

☐ $m \le 1$. ☐ $m \ge 4$. ☐ $m \ge \frac{1}{3}$. ☐ $\frac{1}{3} < m < 1$.

Bài tập 10. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \log_x(x.\cos\alpha + y.\sin\alpha) + \log_y(y\cos\alpha + x.\sin\alpha) = 4 \\ \log_x(x.\cos\alpha + y.\sin\alpha).\log_y(y\cos\alpha + x.\sin\alpha) = 4 \end{cases}.$$

a. Giải hệ khi $\alpha = 45^0$.

b. Giải và biện luận hệ khi $0 < \alpha < 90^0$.

Bài toán 3: Sử dụng phương pháp hàm số .

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 11. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \log_2(x + 1) = y - 1 \\ \log_2 y = x \end{cases}.$$

☐ $(0, 1)$ và $(2, 4)$. ☐ $(0, 1)$ và $(1, 2)$.
☐ $(1, 2)$ và $(8, 3)$. ☐ $(2, 4)$ và $(8, 3)$.

Bài tập 12. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \log_2\sqrt{x + 3} = 1 + \log_3 y \\ \log_2\sqrt{y + 3} = 1 + \log_3 x \end{cases}.$$

☐ $(-2, -2)$. ☐ $(3, 3)$. ☐ $(13, 3)$. ☐ $(1, 1)$.

Bài tập 13. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \log_3(x - y + 3) = 1 - x + y \\ \log_{2+x^2}(8x^2 - 2y + 2m - 4m^2) = \log_{2+y^2}(4y^2 + 2mx - 2m^2) \end{cases}.$$

a. Giải hệ phương trình với $m = 1$.

☐ $(2, -2)$. ☐ $(1, 3)$. ☐ $(3, -3)$. ☐ $(1, 1)$.

b. Xác định m để hệ có hai cặp nghiệm (x_1, y_1) và (x_2, y_2) thoả mãn:

$$(x_1^2 + 3x_2^2) + (3y_1^2 + y_2^2) > 1.$$

☐ $m \neq 0$. ☐ $m > 1$. ☐ $m < \frac{1}{2}$. ☐ $0 \neq m < \frac{2}{3}$.

Bài tập 14. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \ln x - \ln y = y - x \\ x^2 - m(x + 2y) + 2 = 0 \end{cases}.$$

a. Giải hệ phương trình với $m = 1$.

b. Xác định m để hệ có hai cặp nghiệm phân biệt.

Bài toán 4: Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 15. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} \lg x.\lg y + \lg^2 x = m(\lg y - 1) \\ \lg x.\lg y + \lg^2 y = m(\lg x - 1) \end{cases}.$$

Bài tập 16. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\log_3 x^2 - \log_3 y = 0 \\ |x|^3 + y^2 - my = 0 \end{cases}.$$

Bài toán 5: Sử dụng phương pháp đánh giá.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 17. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y = (\log_2 y - \log_2 x)(2 + xy) \\ x^3 + y^3 = 16 \end{cases}.$$

☐ $(2, 2)$. ☐ $(1, 1)$. ☐ $(3, -2)$. ☐ $(9, 2)$.

Bài tập 18. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \log_2\sqrt{\sin x + 3} = \log_3(3\cos y) \\ \log_2\sqrt{\cos y + 3} = \log_3(3\sin x) \end{cases}.$$

☐ $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ 2l\pi\right)$, k, l $\notin$ **Z**. ☐ $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ và $\left(\frac{5\pi}{2}, 2\pi\right)$.

☐ $\left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$ và $\left(\frac{5\pi}{2}, 16\pi\right)$. ☐ $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ 2l\pi\right)$, k, l $\notin$ **Z**.

III. HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. **Điều kiện** $x > 0$.

Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} 2^{2\sqrt{x}} = 2^{y-1} \\ 3^{\frac{1}{2}\log_3 x} = \frac{y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x} = y - 1 \\ \left(3^{\log_3 x}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x} = y - 1 \\ \sqrt{x} = \frac{y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2.\frac{y}{3} = y - 1 \\ \sqrt{x} = \frac{y}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ \sqrt{x} = \frac{y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Vậy, hệ phương trình có một cặp nghiệm (1, 3).

b. **Kí hiệu các phương trình của hệ theo thứ tự là (1) và (2).**

Điều kiện :

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 4 - x \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq 4.$$

Từ phương trình (2) ta được:

$$y = 1 - \log_3 x \Leftrightarrow 3^y = 3^{1-\log_3 x} = \frac{3}{3^{\log_3 x}} = \frac{3}{x}. \quad (3)$$

Thay (3) vào (1) ta được:

$$(\sqrt{x+1} - 1).\frac{3}{x} = \frac{3\sqrt{4-x}}{x} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{4-x} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt{4-x} + 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4-x} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 4 - x = (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = 0.$$

Vậy, hệ phương trình có một cặp nghiệm (3, 0).

Bài tập 2. Điều kiện:

$$\begin{cases} 2x > 0 \\ x + 3y > 0 \\ xy + 1 > 0 \\ 4y^2 + 2y - 2x + 4 > 0 \\ x/y > 0 \end{cases}. \qquad (*)$$

Biến đổi hệ phương trình về dạng:

$$\begin{cases} \dfrac{4(x^2 + y^2)}{2x} = x + 3y \\ \dfrac{xy + 1}{4y^2 + 2y - 2x + 4} = \dfrac{x}{4y} \end{cases}. \qquad (I)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 - xy + 2y - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)(x - 2y) = 0 \\ (x - y)(x - 2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ \begin{cases} x = 2y \\ x = 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Từ (I), điều kiện (*) trở thành x, y > 0.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là (2, 1) và (α, α) với $\alpha \in \mathbf{R}^*$.

Bài tập 3. Điều kiện $x > 0$, $0 < y \neq 1$.

Lấy logarit cơ số 2 hai vế phương trình thứ nhất, ta đưa hệ về dạng:

$$\begin{cases} 2\log_2 x = 4\log_2 y \\ \log_2 x - \log_2 y = \dfrac{m\log_2 x}{\log_2 y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 2\log_2 y \\ 2\log_2 y - \log_2 y = \dfrac{2m\log_2 y}{\log_2 y} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 2\log_2 y \\ \log_2 y = 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 4m \\ \log_2 y = 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2^{4m} \\ y = 2^{2m} \end{cases}.$$

a. Với m = 1, ta được:

$$\begin{cases} x = 16 \\ y = 4 \end{cases}.$$

Vậy, với m = 1 hệ phương trình có một cặp nghiệm (16, 4).

b. Để hệ có cặp nghiệm (x, y) thoả mãn x > 1 và y < 4

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{4m} > 1 \\ 2^{2m} < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m > 0 \\ 2m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

Vậy, với 0 < m < 1 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 4. Điều kiện:

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ y > 0 \end{cases}. \qquad (*)$$

Biến đổi tương đương hệ về dạng:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\log_3 x^2 - \log_3 y = 0 \\ |x|^3 + y^2 - my = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 |x| = \log_3 y \\ |x|^3 + y^2 - my = 0 \end{cases}$$

$$\xleftrightarrow{(*)} \begin{cases} |x| = y \\ f(y) = y^2 + y - m = 0 \quad (1) \end{cases}.$$

a. Với m = 2, ta được:

$$\begin{cases} |x| = y \\ y^2 + y - 2 = 0 \end{cases} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} |x| = y \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Vậy, với m = 2 hệ có hai cặp nghiệm (1, 1) và (−1, 1).

b. Hệ (I) có nghiệm

$\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm dương $\Leftrightarrow af(0) < 0 \Leftrightarrow -m < 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Vậy, với m > 0 hệ đã cho có nghiệm.

Bài tập 5.

a. Điều kiện x, y > 0.

Lấy logarit cơ số 10 hai vế hai phương trình, ta được:

$$\begin{cases} \lg 3.\lg x = \lg 4.\lg y \\ (\lg 4 + \lg x).\lg 4 = (\lg 3 + \lg y).\lg 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg 3.\lg x - \lg 4.\lg y = 0 \\ \lg 4.\lg x - \lg 3.\lg y = \lg^2 3 - \lg^2 4 \end{cases}.$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = \lg x \\ v = \lg y \end{cases}$$

Khi đó, hệ có dạng:

$$\begin{cases} u\lg 3 - v\lg 4 = 0 \\ u\lg 4 - v\lg 3 = \lg^2 3 - \lg^2 4 \end{cases}$$

Ta có:

$D = \begin{vmatrix} \lg 3 & -\lg 4 \\ \lg 4 & -\lg 3 \end{vmatrix} = \lg^2 4 - \lg^2 3 \neq 0$, hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

$$D_u = \begin{vmatrix} 0 & -\lg 4 \\ \lg^2 3 - \lg^2 4 & -\lg 3 \end{vmatrix} = (\lg^2 3 - \lg^2 4).\lg 4,$$

$$D_v = \begin{vmatrix} \lg 3 & 0 \\ \lg 4 & \lg^3 3 - \lg^3 4 \end{vmatrix} = (\lg^2 3 - \lg^2 4).\lg 3.$$

Suy ra, hệ có nghiệm:

$$\begin{cases} u = \dfrac{D_x}{D} = -\lg 4 \\ v = \dfrac{D_y}{D} = -\lg 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = -\lg 4 \\ \lg y = -\lg 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{4} \\ y = \dfrac{1}{3} \end{cases}.$$

Điều kiện:

$$\begin{cases} x - y > 0 \\ x + y > 0 \\ x, y \neq 0 \end{cases}.$$

Biến đổi hệ phương trình về dạng:

$$\begin{cases} 2\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right) = 5 \\ \log_3(x^2 - y^2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right) = 5 \quad (1) \\ x^2 - y^2 = 3 \quad (2) \end{cases}.$$

Giải (1) bằng cách đặt $t = \dfrac{x}{y} \Rightarrow \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{t}$.

Khi đó (1) có dạng:

$$2(t + \frac{1}{t}) = 5 \Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2y \\ y = 2x \end{array}\right..$$

- Với $x = 2y$ thì:

$$(2) \Leftrightarrow 4y^2 - y^2 = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \Rightarrow x = 2 \\ y = -1 \Rightarrow x = -2 \text{ (l)} \end{array}\right.$$

- Với $y = 2x$ thì:

$$(2) \Leftrightarrow x^2 - 4x^2 = 3 \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, hệ phương trình có một cặp nghiệm (2, 1).

ài tập 6. Kí hiệu các phương trình của hệ theo thứ tự là (1) và (2).

Điều kiện:

$$\begin{cases} 0 < 1 + x \neq 1 \\ 0 < 1 - y \neq 1 \\ y \neq 1 \\ 1 + 2x > 0 \\ 1 + 2y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2} < x \neq 0 \\ -\dfrac{1}{2} < y < 1 \\ y \neq 0 \end{cases}. \qquad (*)$$

Giải (1)

$$(1) \Leftrightarrow \log_{1+x}(1 - y) + \log_{1-y}(1 + x) = 2. \qquad (3)$$

Đặt $t = \log_{1+x}(1 - y) \Rightarrow \log_{1-y}(1 + x) = \dfrac{1}{t}$.

Khi đó:

$$(3) \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} = 2 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \log_{1+x}(1 - y) = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 - y = 1 + x \Leftrightarrow x = -y.$$

Khi đó, hệ có dạng :

$$\begin{cases} x = -y \\ \log_{1+x}(1-2x) + \log_{1+x}(1+2x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ \log_{1+x}(1-4x^2) = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ 1 - 4x^2 = (1+x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ 5x^2 + 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \ (l) \\ x = -\dfrac{2}{5} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{2}{5} \\ y = \dfrac{2}{5} \end{array}\right. .$$

Vậy, hệ phương trình có một cặp nghiệm $(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$.

Bài tập 7. Điều kiện x, y>0.

Đặt:

$$\begin{cases} u = \lg x \\ v = \lg y \end{cases}$$

Khi đó, hệ ban đầu (kí hiệu là (I)) được biến đổi về dạng:

$$\begin{cases} 4u - mv = -m - 1 \\ (m+6)u + 2v = m + 3 \end{cases}. \qquad \text{(II)}$$

Ta có:

$$D = m^2 + 6m + 8; \qquad D_u = m^2 + m - 2; \qquad D_v = m^2 + 11m + 18.$$

- Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m + 8 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq -4 \end{cases}$.

  Hệ (II) có nghiệm duy nhất là:

$$\begin{cases} u = \dfrac{D_u}{D} = \dfrac{m-1}{m+4} \\ v = \dfrac{D_v}{D} = \dfrac{m+9}{m+4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = \dfrac{m-1}{m+4} \\ \lg y = \dfrac{m+9}{m+4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10^{\frac{m-1}{m+4}} \\ y = 10^{\frac{m+9}{m+4}} \end{cases}.$$

- Nếu $D = 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = -4 \end{array}\right.$.

- Với $m = -2 \Rightarrow D = D_u = D_v = 0$

  Khi đó (II) có vô số nghiệm là các cặp (u, v) thoả mãn $4u + 2v = 1$

  $\Leftrightarrow$ hệ (I) vô số nghiệm là các cặp (x, y) không âm thoả mãn:

  $$4\lg x + 2\lg y = 1 \Leftrightarrow \lg x^4 + \lg y^2 = 1 \Leftrightarrow \lg(x^4.y^2) = 1$$

  $$\Leftrightarrow x^4.y^2 = 10$$

- Với $m = -4 \Rightarrow D_u \neq 0$

Khi đó (II) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ hệ (I) vô nghiệm.

Kết luận:

- Với $m \neq -2$ và $m \neq -4$ hệ có nghiệm duy nhất là:

$$\begin{cases} x = 10^{\frac{m-1}{m+4}} \\ y = 10^{\frac{m+9}{m+4}} \end{cases}.$$

- Với $m = -2$ hệ có vô số nghiệm là các cặp (x, y) thoả mãn:

$$\begin{cases} x, y > 0 \\ x^4y^2 = 10 \end{cases}.$$

- Với $m = -4$ hệ vô nghiệm.

Bài tập 8. Điều kiện $x, y > 0$.

Đặt:

$$\begin{cases} u = \ln x \\ v = \ln y \end{cases}$$

Khi đó, hệ ban đầu (kí hiệu là (I)) được biến đổi về dạng:

$$\begin{cases} u = v^2 - v + m \\ v = u^2 - u + m \end{cases}.$$

Trừ từng vế hệ phương trình, ta được:

$$u - v = -(u^2 - v^2) + (u - v) \Leftrightarrow u^2 - v^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v \\ u = -v \end{array}\right..$$

Khi đó, hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} u = v \\ u^2 - 2u + m = 0 \quad (1) \end{cases} \text{(I) hoặc } \begin{cases} u = -v \\ u^2 + m = 0 \quad (2) \end{cases} \text{(II)}$$

a. Với $m = 1$, ta được:

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 - 2u + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow u = v = 1 \Leftrightarrow \ln x = \ln y = 1 \Leftrightarrow x = y = e.$$

Vậy, với $m = 1$ hệ có nghiệm duy nhất (e, e).

b. Hệ có nghiệm khi và chỉ khi :

$$\left[\begin{array}{l} (1)\text{co nghiem} \\ (2)\text{co nghiem} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta_{(1)} \geq 0 \\ \Delta_{(2)} \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - m \geq 0 \\ -m \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m \leq 1.$$

Vậy, hệ có nghiệm khi $m \leq 1$.

Bài tập 9. Điều kiện:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y > 0 \end{cases}.$$

Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + 2\lg y = 3m \\ x - 6\lg y = 1 \end{cases}.$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = \sqrt{x} \\ v = \lg y \end{cases}, \text{ điều kiện } u \geq 0.$$

Khi đó, hệ có dạng:

$$\begin{cases} u + 2v = 3m \\ u^2 - 6v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2v = 3m - u \\ u^2 - 3(3m - u) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2v = 3m - u \\ f(u) = u^2 + 3u - 9m - 1 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

a. Với m = 1, ta được:

$$\begin{cases} 2v = 3 - u \\ u^2 + 3u - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2v = 3 - u \\ \left[\begin{array}{l} u = -5 \text{ (l)} \\ u = 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 2 \\ \lg y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = \sqrt{10} \end{cases}.$$

Vậy, với m = 1 hệ có một cặp nghiệm $(4, \sqrt{10})$.

b. Với $x \geq 1$ suy ra $\sqrt{x} \geq 1 \Leftrightarrow u \geq 1$.

Để hệ có cặp nghiệm (x, y) thoả mãn $x \geq 1$

$\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm $u \geq 1$ (chỉ có thể có 1 nghiệm thoả mãn điều kiện này bởi $u_1 + u_2 = -3 < 0$)

$$\Leftrightarrow a.f(1) \leq 0 \Leftrightarrow 3 - 9m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{3}.$$

Vậy, với $m \geq \frac{1}{3}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 10. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 11. Điều kiện:

$$\begin{cases} x > -1 \\ y > 0 \end{cases}.$$

Từ hệ suy ra:

$$\log_2(x + 1) + x = \log_2 y + y - 1 \Leftrightarrow \log_2(x + 1) + x + 1 = \log_2 y + y.$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ là hàm đồng biến với $t > 0$, do đó phương trình có dạng:

$$f(x + 1) = f(y) \Leftrightarrow x + 1 = y.$$

Khi đó, hệ được chuyển thành:

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ \log_2(x + 1) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x + 1 = 2^x \end{cases} \overset{\text{Bernoulli}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y = x + 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0\ \&\ y = 1 \\ x = 1\ \&\ y = 2 \end{array}\right..$$

Vậy, hệ có hai cặp nghiệm (0, 1) và (1, 2).

Bài tập 12. Điều kiện x, y > 0.

Biến đổi tương đương hệ về dạng:

$$\begin{cases} \log_2(x + 3) = 2(1 + \log_3 y) \\ \log_2(y + 3) = 2(1 + \log_3 x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x + 3) = 2(1 + \log_3 y) \\ 2(1 + \log_3 x) = \log_2(y + 3) \end{cases} \quad \text{(I)}$$

$$\Rightarrow \log_2(x + 3) + 2\log_3 x = \log_2(y + 3) + 2\log_3 y. \quad (1)$$

Hàm số $f(t) = \log_2(t + 3) + 2\log_3 t$ là hàm đồng biến trên tập $D = (0, +\infty)$

Vậy, phương trình (1) được viết dưới dạng:

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y.$$

Khi đó hệ (I) trở thành:

$$\begin{cases} x = y \\ \log_2(x + 3) = 2(1 + \log_3 x) \quad (2) \end{cases}. \quad \text{(II)}$$

- Giải (2)

$$(2) \Leftrightarrow x + 3 = 2^{2(1 + \log_3 x)} \Leftrightarrow x + 3 = 4.2^{\log_3 x^2}$$

$$\Leftrightarrow x + 3 = 4.2^{\log_3 2.\log_2 x^2} \Leftrightarrow x + 3 = 4.(x^2)^{\log_3 2} \Leftrightarrow x + 3 = 4.x^{\log_3 4}$$

$$\Leftrightarrow x^{1 - \log_3 4} + 3.x^{-\log_3 4} = 4. \quad (3)$$

Hàm số $g(x) = x^{1 - \log_3 4} + 3.x^{-\log_3 4}$ là hàm nghịch biến trên tập D nên phương trình (3) nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Nhận xét rằng x = 1 là nghiệm của phương trình, bởi khi đó:

$$1^{1 - \log_3 4} + 3.1^{-\log_3 4} = 4 \Leftrightarrow 4 = 4 \text{ đúng}.$$

Khi đó, hệ (II) trở thành:

$$\begin{cases} x = y \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1.$$

Vậy, hệ đã cho có nghiệm duy nhất (1, 1).

Bài tập 13. Xét phương trình thứ nhất của hệ với phép đổi biến $t = x - y + 3 > 0$, ta có $\log_3 t = 4 - t$.

Nhận xét rằng:

- VT là hàm đồng biến.
- VP là hàm nghịch biến.

Vậy, phương trình nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất. Thấy ngay $t = 3$ là nghiệm của phương trình. Khi đó :

$$x - y + 3 = 3 \Leftrightarrow x = y.$$

Vậy, hệ được viết lại dưới dạng:

$$\begin{cases} x = y \\ 2x^2 - (m+1)x + m - m^2 = 0 \\ 2x^2 + mx - m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = m \\ x_2 = 1 - m \end{array}\right. \\ 2x^2 + mx - m^2 > 0 \end{cases}.$$

a. Với $m = 1$, ta được:

$$\begin{cases} x = y \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{array}\right. \\ 2x^2 + x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1.$$

Vậy, với $m = 1$ hệ có nghiệm $(1, 1)$.

b. Điều kiện $x_1^2 + 3x_2^2 + 3y_1^2 + y_2^2 > 1$ trở thành $4x_1^2 + 4x_2^2 > 1$.

Tóm lại điều kiện là:

$$\begin{cases} 4m^2 + 4(1-m)^2 > 1 \\ 2m^2 + m.m - m^2 > 0 \\ 2(1-m)^2 + m.(1-m) - m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8m^2 - 8m + 3 > 0 \\ m^2 > 0 \\ 2 - 3m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \neq m < \frac{2}{3}.$$

Vậy, với $0 \neq m < \frac{2}{3}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 14. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 15. Ký hiệu hệ:

$$\begin{cases} \lg x.\lg y + \lg^2 x = m(\lg y - 1) \quad (1) \\ \lg x.\lg y + \lg^2 y = m(\lg x - 1) \end{cases}. \qquad (I)$$

Điều kiện $x, y > 0$.

Điều kiện cần: Nhận xét rằng nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì cũng có nghiệm (y_0, x_0), do đó hệ có nghiệm duy nhất thì $x_0 = y_0$. Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow 2\lg^2 x_0 - m\lg x_0 + m = 0. \qquad (2)$$

Đặt $t = \lg x_0$, ta được:

$$(2) \Leftrightarrow 2t^2 - mt + m = 0. \qquad (3)$$

Do x_0 duy nhất $\Leftrightarrow$ phương trình (3) có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \Delta'_{(3)} = 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 8 \end{array}\right..$$

Điều kiện đủ

- Với m = 0, ta có:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x.\lg y + \lg^2 x = 0 \\ \lg x.\lg y + \lg^2 y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lg y + \lg x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}.$$

hệ có vô số nghiệm $\Rightarrow$ m = 0 loại.

- Với m = 8, nhận thấy

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x.\lg y + \lg^2 x = 8(\lg y - 1) \\ \lg x.\lg y + \lg^2 y = 8(\lg x - 1) \end{cases}$$

Trừ từng vế hệ phương trình, ta được :

$$\lg^2 x - \lg^2 y = -8(\lg x - \lg y) \Leftrightarrow (\lg x - \lg y)(\lg x + \lg y + 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg x = \lg y \\ \lg y = -8 - \lg x \end{array}\right. .$$

Khi đó, hệ phương trình tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lg x = \lg y \\ 2\lg^2 x - 8\lg x + 8 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \lg x = -8 - \lg y \\ 72 = 0 \quad \text{vô lí} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \lg x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 100.$$

Vậy, với m = 8 hệ có nghiệm duy nhất.

Bài tập 16. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 17. Ký hiệu các phương trình của hệ theo thứ tự là (1) và (2).

Điều kiện x, y > 0.

- Giải (1), ta có nhận xét sau :
  - Nếu $x > y \Leftrightarrow \log_2 x > \log_2 y$, khi đó:

$$\begin{cases} VT_{(1)} > 0 \\ VP_{(1)} < 0 \end{cases} \Rightarrow (1) \text{ vô nghiệm.}$$

  - Nếu $x < y \Leftrightarrow \log_2 x < \log_2 y$, khi đó:

$$\begin{cases} VT_{(1)} < 0 \\ VP_{(1)} > 0 \end{cases} \Rightarrow (1) \text{ vô nghiệm.}$$

  - Vậy x = y là nghiệm của (1).

Khi đó, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x = y \\ x^3 + y^3 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x^3 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 2.$$

Vậy, hệ có một cặp nghiệm (2, 2).

Bài tập 18. $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 2l\pi\right)$, $k, l \notin \mathbf{Z}$.

MỤC LỤC

GIỚI THIỆU CHUNG

CHƯƠNG I

DÃY SỐ – CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

Chủ đề 1: Dãy số 5

  Bài toán 1: Mở đầu về dãy số..................... 6

  Bài toán 2: Sử dụng phương pháp quy nạp chứng minh dãy số (u_n) thoả mãn tính chất K..................... 7

  Bài toán 3: Xác định công thức của dãy số (u_n)..................... 8

  Bài toán 4: Xét tính đơn điệu của một dãy số (u_n)..................... 10

  Bài toán 5: Xét tính bị chặn của một dãy số (u_n)..................... 11

  Hướng dẫn – Giải – Đáp số 13

Chủ đề 2: Giới hạn của dãy số 17

  Bài toán 1: Sử dụng định nghĩa chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$..................... 18

  Bài toán 2: Chứng minh một dãy số có giới hạn..................... 19

  Bài toán 3: Tính giới hạn của dãy số bằng các định lí về giới hạn...... 19

  Hướng dẫn – Giải – Đáp số 21

Chủ đề 3: Cấp số cộng 24

  Bài toán 1: Chứng minh tính chất của một cấp số cộng..................... 24

  Bài toán 2: Chứng minh ba số lập thành một cấp số cộng..................... 25

  Bài toán 3: Tìm điều kiện của tham số để ba số lập thành một cấp số cộng..................... 26

  Bài toán 4: Tìm các phần tử của một cấp số cộng (u_n)..................... 27

  Bài toán 5: Tính tổng..................... 27

  Hướng dẫn – Giải – Đáp số 28

Chủ đề 4: Cấp số nhân 31

  Bài toán 1: Chứng minh tính chất của một cấp số nhân..................... 31

  Bài toán 2: Chứng minh ba số lập thành một cấp số nhân..................... 32

  Bài toán 3: Tìm điều kiện của tham số để ba số lập thành một cấp số nhân..................... 32

  Bài toán 4: Tìm các phần tử của một cấp số nhân (u_n)..................... 33

  Bài toán 5: Tính tổng..................... 34

  Hướng dẫn – Giải – Đáp số 35

CHƯƠNG II

GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

Chủ đề 1: Định nghĩa và các định lí về giới hạn của hàm số..................... 39

  Bài toán 1: Sử dụng định nghĩa chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$..................... 40

  Bài toán 2: Sử dụng định nghĩa chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$..................... 41

Bài toán 3: Sử dụng định nghĩa chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.......... 41

Bài toán 4: Chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ không tồn tại........................ 42

Bài toán 5: Giới hạn của hàm số kép.. 42

Bài toán 6: Sử dụng nguyên lí kẹp giữa tìm giới hạn của hàm số......... 44

Bài toán 7: Dùng các định lí về giới hạn và giới hạn cơ bản để tìm giới hạn.. 44

Hướng dẫn – Giải – Đáp số 46

Chủ đề 2: Các dạng vô định.. 52

Bài toán 1: Tính giới hạn dạng $\frac{0}{0}$ 52

Bài toán 2: Tính giới hạn dạng $\frac{\infty}{\infty}$ 55

Bài toán 3: Giới hạn dạng $\infty - \infty$... 56

Bài toán 4: Giới hạn của hàm số lượng giác.. 56

Bài toán 5: Giới hạn dạng 1^{∞}, $0.\infty$, ∞^0.. 58

Hướng dẫn – Giải – Đáp số 60

CHƯƠNG III

HÀM SỐ LIÊN TỤC

Chủ đề 1: Hàm số liên tục...... 69

Bài toán 1: Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm – Dạng I.......... 70

Bài toán 2: Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm – Dạng II......... 71

Bài toán 3: Xét tính liên tục của hàm số trên một khoảng................... 72

Hướng dẫn – Giải – Đáp số 73

Chủ đề 2: Tính chất của hàm số liên tục..75

Bài toán 1: Sử dụng tính liên tục của hàm số chứng minh phương trình có nghiệm.. 75

Bài toán 2: Sử dụng tính liên tục của hàm số xét dấu hàm số.............. 76

Hướng dẫn – Giải – Đáp số 77

CHƯƠNG IV

HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

Chủ đề 1: Luỹ thừa – Hàm số mũ 83

Bài toán 1: Các phép toán về luỹ thừa...... 84

Bài toán 2: So sánh các số có dạng luỹ thừa.. ..85

Bài toán 3: Tìm tập xác định của hàm số mũ......... 87

Bài toán 4: Tìm giới hạn của hàm số mũ.. ..87

Bài toán 5: Xét tính liên tục của hàm số mũ tại điểm x_0..... 89

Hướng dẫn – Giải – Đáp số 90

Chủ đề 2: Logarit – Hàm số logarit ..97
Bài toán 1: Các phép toán về logarit ..98
Bài toán 2: Sử dụng công thức đổi cơ số ..99
Bài toán 3: So sánh các số có dạng logarit 100
Bài toán 4: Tìm tập xác định của hàm số có chứa logarit 101
Bài toán 5: Tìm giới hạn của hàm số logarit 102
Bài toán 6: Xét tính liên tục của hàm số logarit tại điểm x_0 103
Hướng dẫn – Giải – Đáp số 103

CHƯƠNG V
PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ MŨ

Chủ đề 1: Phương trình mũ 111
Bài toán 1: Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương 111
Bài toán 2: Phương pháp logarit hoá và đưa về cùng cơ số 113
Bài toán 3: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 1 113
Bài toán 4: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 2 117
Bài toán 5: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 3 118
Bài toán 6: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 4 119
Bài toán 7: Sử dụng tính chất liên tục của hàm số 120
Bài toán 8: Sử dụng tính chất đơn điệu của hàm số 120
Bài toán 9: Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ 122
Bài toán 10: Sử dụng phương pháp đánh giá 123
Hướng dẫn – Giải – Đáp số 125
Chủ đề 2: Bất phương trình mũ 151
Bài toán 1: Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương 151
Bài toán 2: Phương pháp logarit hoá và đưa về cùng cơ số 153
Bài toán 3: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 1 154
Bài toán 4: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 2 156
Bài toán 5: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 3 157
Bài toán 6: Sử dụng tính chất đơn điệu của hàm số 157
Bài toán 7: Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ 158
Bài toán 8: Sử dụng phương pháp đánh giá 158
Hướng dẫn – Giải – Đáp số 159
Chủ đề 3: Hệ phương trình mũ 171
Bài toán 1: Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương 171
Bài toán 2: Phương pháp đặt ẩn phụ 172
Bài toán 3: Sử dụng phương pháp hàm số 174
Bài toán 4: Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ 175
Bài toán 5: Sử dụng phương pháp đánh giá 175
Hướng dẫn – Giải – Đáp số 176

CHƯƠNG VI

PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ LOGARIT

Chủ đề 1: Phương trình logarit 183
Bài toán 1: Phương pháp logarit hoá và đưa về cùng cơ số 183
Bài toán 2: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 1 186
Bài toán 3: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 2 189
Bài toán 4: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 3 190
Bài toán 5: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 4 191
Bài toán 6: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 5 191
Bài toán 7: Sử dụng tính chất liên tục của hàm số 192
Bài toán 8: Sử dụng tính chất đơn điệu của hàm số 192
Bài toán 9: Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ 194
Bài toán 10: Sử dụng phương pháp đánh giá 194
Hướng dẫn – Giải – Đáp số 195
Chủ đề 2: Bất phương trình logarit 217
Bài toán 1: Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương 217
Bài toán 2: Sử dụng các phép biến đổi logarit 220
Bài toán 3: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 1 220
Bài toán 4: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 2 221
Bài toán 5: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 3 222
Bài toán 6: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 4 222
Bài toán 7: Sử dụng tính chất đơn điệu của hàm số 223
Bài toán 8: Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ 224
Bài toán 9: Sử dụng phương pháp đánh giá 224
Hướng dẫn – Giải – Đáp số 225
Chủ đề 3: Hệ phương trình logarit 238
Bài toán 1: Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương 238
Bài toán 2: Phương pháp đặt ẩn phụ 239
Bài toán 3: Sử dụng phương pháp hàm số 240
Bài toán 4: Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ 241
Bài toán 5: Sử dụng phương pháp đánh giá 241
Hướng dẫn – Giải – Đáp số 242

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 9724770. Fax: (04) 9714899
E-mail: nxb@vnu.edu.vn

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: NGUYỄN BÁ THÀNH

Biên tập: QUỐC TRUNG

Trình bày bìa: THÁI VĂN

TOÁN NÂNG CAO TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 1

Mã số: 1L - 11ĐH2007

In 2.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ti TNHH In Bao Bì Phong Tân - TP. Hồ Chí Minh

Số xuất bản: 868 - 2006/CXB/9 – 180/ĐHQGHN, ngày 17/11/2006.

Quyết định xuất bản số: 29 LK/XB.
In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2006.